Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 3 (23. 1.)
Kevät 2024

1. Olkoon $\boldsymbol{R} = (R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas ja $\boldsymbol{K} = (K, +, \cdot)$ kunnan $\boldsymbol{L} = (L, +, \cdot)$ alikunta. Osoita tosiksi seuraavat faktat:

a) Polynomirengas $R[x]$ on R-moduli, kun skalaarikerronta tulkitaan luonnollisella tavalla.

b) L on K-vektoriavaruus, kun skalaarikerronta tulkitaan luonnollisella tavalla.

Onko kohdassa a mahdollista, että $av = 0$ joillakin $a \in R \smallsetminus \{0\}$ ja $v \in R[x] \smallsetminus \{0\}$?

2. Osoita, että euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ voidaan varustaa skalaarikerronnalla niin, että siitä tulee $M_n(\mathbb{R})$-moduli, missä $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ on reaalisten $n \times n$-matriisien muodostama rengas ja $(\mathbb{R}^n, +)$ on luonnollisella yhteenlaskullaan varustettu Abelin ryhmä.

3. $V = {\mathbb{Z}_3}^2$ on luonnollisella tavalla $\mathbb{Z}_3$-vektoriavaruus, jossa on 9 vektoria. Kuinka moni osajoukko $S \subseteq V$ virittää sen?

4. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $S = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Mitkä seuraavista S:n osajoukoista ovat sen vektorialiavaruuksia:

$$\begin{aligned} U_1 &= \Big\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S \;\Big|\; \text{sarja } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ hajaantuu} \Big\}, \\ U_2 &= \{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S \mid a_k = a_0, \text{ kun } k \text{ on alkuluku} \}, \\ U_3 &= \{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S \mid a_k = 0, \text{ kun } \sin k > 0 \}? \end{aligned}$$

5. Onko joukko

$$\{\sin, \cos, \exp\}$$

vapaa reaalisessa vektoriavaruudessa ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$? Tässä sin ja cos ovat tietenkin tuttuja trigonometrisiä kuvauksia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja exp on eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

6. Olkoon V epätriviaali K-vektoriavaruus, missä kerroinkunta $(K, +, \cdot)$ on ääretön. Todista, että V ei ole äärellisen monen aidon aliavaruutensa yhdiste.