Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 4 (30. 1.)
Kevät 2024

1. Osoita, että $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Q}$ ei ole äärellisesti viritetty.

2. Olkoot S ja T vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Näytä, että $S \cup T$ on V:n aliavaruus, jos ja vain jos $S \subseteq T$ tai $T \subseteq S$.

3. Olkoon X joukko. Osoita, että on olemassa sellainen perhe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, että jokaista $A \subseteq X$ vastaa yksikäsitteinen äärellinen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, jolle on voimassa seuraavaa:

$$a \in A, \text{ jos ja vain jos } \text{ parittoman monella } F \in \mathcal{F} \text{ pätee } a \in F.$$

[Vihje: Tarkastele potenssijoukkoa $\mathcal{P}(X)$ sopivana vektoriavaruutena.]

4. Onko joukko

$$\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1, |\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,|\}$$

vapaa reaalisessa vektoriavaruudessa ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$?

5. Millä arvoilla $c \in \mathbb{Q}$ pätee, että $\mathbb{Q}$-vektoriavaruuden $\mathbb{Q}^3$ jono

$$((c, 1, 0), (1, c, 1), (0, 1, c))$$

on vapaa?

6. Osoita, että vapaudella on K-vektoriavaruudessa V seuraavat perusominaisuudet: Olkoot $A, B \subseteq V$.

1) $\emptyset$ on vapaa.
2) Jos $A \subseteq B$ ja B on vapaa, niin A:kin on vapaa.
3) A on vapaa, jos ja vain jos kaikille äärellisille $A_0 \subseteq A$ pätee, että A_0 on vapaa.
4) Jos $A, B \subseteq V$ ovat vapaita ja $|A| < |B|$, niin on olemassa sellainen $x \in B \setminus A$, että $A \cup \{x\}$ on vapaa.