Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 5 (6. 2.)
Kevät 2024

1. Todista, että ääretönulotteisella K-vektoriavaruudella V on olemassa aito aliavaruus U, jolle $\dim(U) = \dim(V)$.

2. Olkoon p alkuluku. Tunnetusti $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $V = (\mathbb{Z}_p)^3$ on kanta $E = \{e_0, e_1, e_2\}$, missä $e_0 = (1,0,0)$, $e_1 = (0,1,0)$ ja $e_2 = (0,0,1)$. Merkitään

$$E' = \{e'_0, e'_1, e'_2\},$$

missä $e'_i = (1,1,1) - e_i$, $i \in \{0,1,2\}$.

a) Millä alkuluvuilla p pätee, että E' on V:n kanta?

b) Kun $p = 3$, sovella vaihto-ominaisuuden seurauksia sellaisen jonon (E_0, E_1, E_2, E_3) muodostamiseksi, että kukin E_i on V:n kanta, $E_0 = E$, $E_3 = E'$ ja $E_{i+1} \setminus E_i$ on yksiö, kun $j \in \{0,1,2\}$.

3. Esitä esimerkki modulista, jolla on äärellinen kanta mutta jonka kaikki virittäjistöt eivät sisällä kantaa.

4. Olkoot L ja M R-moduleita, $\bar{0}_L$ ja $\bar{0}_M$ niiden nolla-alkiot sekä $A\colon L \to M$ lineaarikuvaus. Osoita, että $A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M$ ja $A(-x) = -Ax$, kun $x \in L$,

a) vetoamalla siihen, että A on ryhmähomomorfismi,

b) käyttämällä hyväksi lineaarikuvausten skaalaussääntöä $A(cx) = cAx$, kun $c \in R$ ja $x \in L$.

5. Olkoon $C = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\, f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on jatkuva} \,\}$ ja $A\colon C \to C$,

$$Ax(t) = \int_0^t \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s.$$

Näytä, että A on lineaarikuvaus. Onko A injektio? Onko $A\colon C \to C$ surjektio?

6. Olkoon $A\colon M \to M$ R-lineaarikuvaus ja $y_0 \in M$. Osoita, että yhtälöllä $A(x) = y_0$ joko ei ole lainkaan ratkaisuja tai x_0 on yksi ratkaisu ja kaikkien ratkaisujen joukko on $x_0 + \mathrm{Ker}(A) = \{\, x_0 + x \mid x \in \mathrm{Ker}(A) \,\}$. Esitä kummastakin tapauksesta esimerkki, joissa käytetään samaa lineaarikuvausta.