Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 6 (13. 2.)
Kevät 2024

1. Tarkastellaan $\mathbb{Q}$-vektoriavaruutta $\mathbb{R}$. ($(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ on kunnan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alikunta, joten $\mathbb{R}$ on luonnollisella tavalla $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus.) Tiedetään, että $\mathbb{R}$:llä on olemassa kanta, olkoon yksi tällainen E. Voiko E olla numeroituva eli voiko olla olemassa injektio $f\colon E \to \mathbb{N}$?

2. Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ja $P_n = \{\, p \in R[x] \mid \deg(p) < n \,\}$. Miksi P_n on $R[x]$:n R-alimoduli? Asetetaan $A\colon P_n \to P_n$,

$$A(p) = p - p(0)(1 + x + x^2).$$

Näytä, että A on lineaarikuvaus. Mikä on $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$?

3. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta, jolloin $K[x]$ on luonnollisella tavalla K-vektoriavaruus. Tarkastellaan $K[x]$:n aliavaruuksia $\mathcal{P}_n = \{\, p \in K[x] \mid \deg(p) < n \,\}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Merkitään

$$U = \{\, p \in \mathcal{P}_5 \mid p(1) = p(3) \,\}.$$

Näytä, että myös U on $\mathcal{P}_5$:n aliavaruus. Määritä tarkasteltavien aliavaruuksien dimensiot eli $\dim(U)$ ja $\dim(\mathcal{P}_n)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Olkoon $A\colon U \to V$ K-lineaarikuvaus ja E vektoriavaruuden U kanta.

a) Osoita, että jos A ei ole injektio, niin jono $(A(e))_{e \in E}$ ei ole vapaa. Voiko $A[E]$ olla vapaa?

b) Näytä, että jos A ei ole surjektio, niin $A[E]$ ei ole virittäjistö.

5. Olkoon p alkuluku ja $m, n \in \mathbb{N}$. Kuinka monta $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-lineaarikuvausta $A\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ on olemassa?

6. Esitä esimerkki vektoriavaruudesta V ja lineaarikuvauksesta $A\colon V \to V$, joille $\mathrm{Ker}(A) \neq \{\bar{0}\}$ ja $\mathrm{Im}(A) = V$.