Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 7 (20. 2.)
Kevät 2024

1. Olkoot V ja Z K-vektoriavaruuksia, $x \in V \setminus \{\bar{0}\}$ ja $z \in Z$. Todista, että on olemassa sellainen lineaarikuvaus $A\colon V \to Z$, että $Ax = z$.

2. Olkoon $s = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Merkitään $e_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$e_k(i) = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = i \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

ja y:llä vakiojonoa $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $y(i) = 1$. Osoita, että avaruudella s on olemassa sellainen lineaarinen automorfismi A, että jokaisella $k \in \mathbb{N}$ $\quad A(e_k) = e_k$ ja $A(y) = y + 24e_7$.

3. Esitä esimerkki $\mathbb{R}^4$:n aidoista epätriviaaleista aliavaruuksista U, U', V ja V', joille $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ ja $\mathbb{R}^4 = U' + V'$, mutta jälkimmäinen summa ei ole suora.

4. $\mathbb{Q}$ on luonnollisella tavalla $\mathbb{Z}$-moduli, sillä $(\mathbb{Q}, +)$ on Abelin ryhmä. Osoita, että modulia $\mathbb{Q}$ ei voi esittää suorana summana $\mathbb{Q} = L_0 \oplus L_1$, missä L_0 ja L_1 ovat aitoja epätriviaaleja alimoduleja, ts. $\{0\} \subsetneq L_i \subsetneq \mathbb{Q}$, kun $i = 0, 1$.

5. Tarkastellaan avaruuden $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\, x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \text{ jatkuva} \,\}$ aliavaruuksia

$$U = \{\, x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid x(0) = 0 \,\} \text{ ja } Z = \left\{ x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

a) Osoita, että $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + Z$. Onko ko. summa suora?
b) Näytä, että on olemassa äärellisulotteinen $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:n aliavaruus U_1, jolle $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U_1 \oplus Z$.

6. [*Vapaiden modulien teoriaa 1*] Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas, I sen ideaali ja L vapaa R-moduli. Kiinnitetään L:lle kanta E. Merkitään

$$IL = \{\, rx \mid r \in I, x \in L \,\} \text{ ja } M = \mathrm{sp}(IL).$$

Olkoon $x \in L$ ja $x = \sum_{e \in E} \lambda_e e$ sen yksikäsitteinen esitys kannan E vektorien lineaarikombinaationa. Osoita, että $x \in M$ täsmälleen silloin, kun jokaisella $e \in E$ pätee $\lambda_e \in I$.