Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 8 (5. 3.)
Kevät 2024

1. Olkoot S, T ja U vektoriavaruuden V aliavaruuksia, joille $U \subseteq S$. Todista *modulaarisääntö*

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U.$$

2. Olkoon M *yksinkertainen* moduli eli moduli, jonka ainoat alimodulit ovat $\{\bar{0}\}$ ja M. Olkoon $A\colon M \to M$ lineaarikuvaus, joka ei ole nollakuvaus.

a) Näytä, että $A\colon M \cong M$.
b) Onko $\mathbb{Z}$ yksinkertainen $\mathbb{Z}$-moduli?
c) Esitä esimerkki yksinkertaisesta modulista, joka ei ole triviaali moduli.

3. Olkoon W äärellisulotteinen vektoriavaruus, jolle $\dim(W) = n$, sekä $k, l \in \mathbb{N}$ lukuja, joille $k + l = n$. Todista, että vektoriavaruuden W voi esittää muodossa $W = U \oplus V$, missä $\dim(U) = k$ ja $\dim(V) = l$.

4. Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja sen alimodulia $M = \mathrm{sp}\big(\{(2,1), (-1,2)\}\big)$. Osoita, että tekijämoduli $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\,/M$ on äärellinen ja määritä sen vektorisumman yhteenlaskutaulu.

5. Olkoon p alkuluku ja $k, n \in \mathbb{N}$, missä $k \leq n$. Olkoon U $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruuden $V = (\mathbb{Z}_p)^n$ k-ulotteinen aliavaruus.

a) Kuinka monta alkiota on U:ssa?
b) Kuinka monta alkiota on tekijäavaruudessa V/U? Mikä on $\dim(V/U)$?

6. Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia. Todista, että

$$\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$$

a) esittämällä $U \times V$ sopivalla tavalla suorana summana ja vetoamalla suoran summan dimensiokaavaan,
b) muodostamalla karteesiselle tulolle $U \times V$ kanta (eli oleellisesti ottaen purkamalla kohdan a todistus).