Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 9 (12. 3.)
Kevät 2024

1. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden reaalista vektoriavaruutta $\mathcal{P}$ ja sen aliavaruuksia

$$\begin{aligned} U &= \{\, x \in \mathcal{P} \mid x(0) = x''(0) = 0 \,\} \text{ ja} \\ Z &= \{\, x \in \mathcal{P} \mid \text{kaikilla } t \in \mathbb{R} \text{ pätee } 2tx''(t) - x''(t) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Onko Z äärellisulotteinen? Onko $\mathcal{P} = U \oplus Z$?

2. Olkoon $(G, +)$ äärellinen Abelin ryhmä ja $g \in G$. Totea, että ehto $A(1) = g$ määrää yksikäsitteisen lineaarikuvauksen $A\colon \mathbb{Z} \to G$. Millä ehdolla $\operatorname{Im}(A) = G$? Homomorfialauseen nojalla $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}(A) \cong \operatorname{Im}(A)$. Miten $|\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}(A)|$ määräytyy ryhmäalkiosta g?

3. Olkoon U vektoriavaruuden V aliavaruus. U:ta kutsutaan V:n *hypertasoksi*, jos $\dim(V/U) = 1$. Todista, että U on V:n hypertaso, jos ja vain jos U on V:n maksimaalinen aito aliavaruus.

4. Olkoon $A\colon U \to V$ K-vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus. Olkoon U_0 U:n ja V_0 V:n aliavaruus. Oletetaan, että $A[U_0] \subseteq V_0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\widetilde{A}\colon U/U_0 \to V/V_0$, jolle $\widetilde{A} \circ p_E = p_F \circ A$, missä $p_E\colon U \to U/U_0$ ja $p_F\colon V \to V/V_0$ ovat kanoniset projektiot.

5. Todista seuraava modulien isomorfialause: Olkoon N moduli, M sen alimoduli ja L edelleen M:n alimoduli. Tällöin

$$(N/L) \,/\, (M/L) \;\cong\; N/M.$$

[Vihje: Sovella modulien homomorfialausetta.]

6. *[Vapaiden modulien teoriaa 2]* Tarkastellaan samaa tilannetta kuin tehtävässä 7.6: Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas, I sen ideaali, L vapaa R-moduli, jolla on kanta E, sekä $M = \operatorname{sp}(IL)$. Luentojen mukaan L/M on R-moduli, mutta L/M:n voi tulkita myös R/I-moduliksi, kun skalaarikerronta määritetään luonnollisella säännöllä

$$(r + I)(x + M) = rx + M,$$

kun $x \in L$ ja $r \in R$.

a) Näytä, että L/M:stä näin saadaan todella R/I-moduli.
b) Oletetaan, että I on aito ideaali eli $I \subsetneq R$. Todista, että L/M on vapaa R/I-moduli ja sillä on kanta
$$E' = \{\, e + M \mid e \in E \,\}.$$