Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 1 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävän 1 ratkaisu on Ville Puuskan käsialaa.

Tehtävä 1. Olkoon $g, g', g'' \in G$ ja $h, h', h'' \in H$. Tällöin ryhmien $(G, \odot)$ ja $(H, \otimes)$ laskutoimitusten liitännäisyyden perusteella

$$\begin{aligned}\Big((g,h)\cdot(g',h')\Big)\cdot(g'',h'') &= (g\odot g', h\otimes h')\cdot(g'',h'')\\ &= ((g\odot g')\odot g'', (h\otimes h')\otimes h'')\\ &= (g\odot(g'\odot g''), h\otimes(h'\otimes h''))\\ &= (g,h)\cdot(g'\odot g'', h'\otimes h'')\\ &= (g,h)\cdot((g',h')\cdot(g'',h'')),\end{aligned}$$

joten myös $\cdot$ on liitännäinen.

Jos $e_G \in G$ ja $e_H \in H$ ovat neutraalialkiot, niin $(e_G, e_H) \in G \times H$ on myös neutraalialkio, sillä

$$(e_G, e_H)\cdot(g,h) = (e_G \odot g, e_H \otimes h) = (g,h) = (g \odot e_G, h \otimes e_H) = (g,h)\cdot(e_G, e_H).$$

Alkion $(g,h) \in G \times H$ käänteisalkio on (g^{-1}, h^{-1}), sillä

$$\begin{aligned}(g^{-1},h^{-1})\cdot(g,h) = (g^{-1}\odot g, h^{-1}\otimes h) = (e_G, e_H) &= (g\odot g^{-1}, h\otimes h^{-1})\\ &= (g,h)\cdot(g^{-1},h^{-1}).\end{aligned}$$

Siispä $(G \times H, \cdot)$ on ryhmä.

Oletetaan sitten, että $(G, \odot)$ ja $(H, \otimes)$ ovat Abelin ryhmiä. Tällöin

$$(g,h)\cdot(g',h') = (g\odot g', h\otimes h') = (g'\odot g, h'\otimes h) = (g',h')\cdot(g,h),$$

joten myös $(G \times H, \cdot)$ on Abelin ryhmä.

Tehtävä 2. *Tapa 1:* Muodostetaan suoraan isomorfismi

$$f\colon (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z},+) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$$

asettamalla

$$f(t+mn\mathbb{Z}) = (t+m\mathbb{Z}, t+n\mathbb{Z}).$$

Tämä kuvaus on hyvinmääritelty, sillä jos kokonaisluvuille $t, t' \in \mathbb{Z}$ pätee $t+mn\mathbb{Z} = t'+mn\mathbb{Z}$, niin $mn \mid t-t'$, joten $m \mid t-t'$ ja $n \mid t-t'$, mistä seuraa $t+m\mathbb{Z} = t'+m\mathbb{Z}$ ja $t+n\mathbb{Z} = t'+n\mathbb{Z}$. Vähintään yhtä selvää on, että f on homomorfismi. Vaikeinta on osoittaa kuvauksen f bijektiivisyys. Koska kuvauksen lähtö ja maali ovat samankokoiset ja äärelliset, riittää osoittaa, että f on surjektio.

Olkoot $u, v \in \mathbb{Z}$. Lukuteoriasta tiedetään, että on olemassa sellaiset $a, b \in \mathbb{Z}$, että $am+bn = 1$, sillä $\operatorname{syt}(m,n) = 1$. Asetetaan $t = ubn + vam$. Tällöin

$$\begin{cases} t \equiv ubn = u(1-am) \equiv u\cdot 1 = u \pmod{m} \\ t \equiv vam = v(1-bn) \equiv v\cdot 1 = u \pmod{n}, \end{cases}$$

joten $f(t) = (u+m\mathbb{Z}, v+n\mathbb{Z})$ ja surjektiivisyys on näytetty. □

Tapa 2 (á la SaLä): Samankokoiset sykliset ryhmät ovat isomorfisia. Molemmat tarkasteltavat ryhmät ovat mn alkion ryhmiä, ja $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z},+)$ on tunnetusti syklinen, joten riittää osoittaa, että myös $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ on syklinen. Tämän näyttämiseksi riittää edelleen löytää tuloryhmälle virittäjä. Osoitetaan, että $g = (1+m\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z})$ on tällainen. Olkoon r sen kertaluku. Tällöin $rg = (r+m\mathbb{Z}, r+n\mathbb{Z}) = (0+m\mathbb{Z}, 0+n\mathbb{Z})$, joten $m \mid r$ ja $n \mid r$. Koska $\operatorname{syt}(m,n) = 1$, tästä seuraa $mn \mid r$. Toisaalta selvästi $(mn)g = (0+m\mathbb{Z}, 0+n\mathbb{Z})$, joten $r = mn$ ja g virittää tuloryhmän $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. □

Tapa 3: (á la ReLö) Tarkastellaan kanonista homomorfismia $h\colon \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$,

$$h(t) = (t+m\mathbb{Z}, t+n\mathbb{Z}).$$

Se on selvästi surjektio, joten ryhmien homomorfismilauseen nojalla

$$(\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}(h),+) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+).$$

Toisaalta $t \in \operatorname{Ker}(h)$ eli $(t+m\mathbb{Z}, t+n\mathbb{Z}) = h(t) = (0+m\mathbb{Z}, ++n\mathbb{Z})$, jos ja vain jos yht'aikaa $m \mid t$ ja $n \mid t$. Koska $\operatorname{syt}(m,n) = 1$, tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $nm \mid t$. Siis $\operatorname{Ker}(h)) = mn\mathbb{Z}$, mikä todistaa väitteen. □

Tehtävä 3. Olkoot $\mathbb{G} = (H, \cdot)$ ja $\mathbb{H} = (H, \cdot)$ ryhmiä sekä f epimorfismi ryhmästä $\mathbb{G}$ ryhmään $\mathbb{H}$.

a) Oletetaan, että $\mathbb{G}$ on syklinen, ts. on olemassa alkio $a \in G$, joka virittää sen. Virittäminen vuorostaan tarkoittaa tässä tapauksessa, että $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Osoitetaan, että $f(a)$ virittää ryhmän $\mathbb{H}$. Olkoon $h \in H$. Koska f on surjektio, on olemassa $g \in G$, jolle $f(g) = h$, ja koska $\mathbb{G}$ on syklinen, niin jollakin $n \in \mathbb{Z}$ pätee $g = a^n$. Kuvauksen f homomorfisuuden tähden saadaan

$$h = f(g) = f(a^n) = f(a)^n.$$

Alkio $f(a)$ siis virittää ryhmän $\mathbb{H}$, joten se on syklinen.

b) Oletetaan, että $\mathbb{G}$ on Abelin ryhmä. Olkoot $h, h' \in H$. Valitaan $g, g \in G$, joille $h = f(g)$ ja $h' = f(g')$, mikä on mahdollista, sillä f on surjektio. Koska f on myös homomorfismi, pätee

$$hh' = f(g)f(g') = f(gg') = f(g'g) = f(g')f(g) = h'h,$$

joten $\mathbb{H}$ on Abelin ryhmä.

Tehtävä 4. Matriisien sarakkeet saadaan selville laskemalla, miten standardikannan alkiot kuvautuvat:

$$\begin{aligned} A(1,0) &= (1+0, 2\cdot 1 - 3\cdot 0) = (1,2), & A(0,1) &= (0+1, 2\cdot 0 - 3\cdot 1) = (1,-3) \\ B(1,0) &= (0, 1 - 5\cdot 0) = (0,1), & B(0,1) &= (1, 0 - 5\cdot 1) = (1,-5). \end{aligned}$$

Siis

$$\mathrm{M}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathrm{M}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matriisien kertolaskulla saadaan

$$\mathrm{M}(A \circ B) = \mathrm{M}(A)\,\mathrm{M}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot -5 \\ 2\cdot 0 + -3\cdot 1 & 2\cdot 1 + -3\cdot -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 17 \end{pmatrix},$$

minkä voi tarkastaa sopivalla matemaattisella ohjelmistolla, esim. Octavella.
Siis $A \circ B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(A \circ B)(x) = (x - 4y, -3x + 17y).$$

Tehtävä 5. A ei ole injektio, sillä

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 - 2 \\ -2 - 6 + 8 \\ 0 - 6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eli $A(2, -3, 2) = (0, 0, 0) = A(0, 0, 0)$. B sen sijaan on injektio, mikä on helpointa osoittaa toteamalla determinantin poikkeavan nollasta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) \cdot (-3) - 7 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= -9 + 15 - 70 - 25 - 6 - 63 = -158 \neq 0.$$

Tehtävä 6. Kunnan $(K, +, \cdot)$ kertolaskuryhmässä on kolme alkiota, joten se on syklinen; virittäjäksi kelpaavat a ja b kumpikin. Siis $a^1 = a$, $a^2 = b$ ja $a^3 = 1$. Kertolaskuryhmän kertotauluksi saadaan ($a \cdot a = a^2 = b$, $a \cdot b = b \cdot a = a^{1+2} = 1$, $b^2 = (a^2)^2 = a^4 = a$)

$\cdot$	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a.

Koska $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, kun $x \in K$, niin koko kunnan $(K, +, \cdot)$ kertolaskutaulu on

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a.

Yhteenlaskua varten todetaan ensin, että ryhmässä $(K, +)$ on neljä alkiota, joten sen alkioiden kertaluvut ovat neljän tekijöitä. Erityisesti $1 + 1 + 1 + 1 = 0$, joten

$$(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0.$$

Tulon nollasäännöstä seuraa nyt $1 + 1 = 0$. (Tämä voidaan päätellä myös siitä, että kunnan karakteristika on aina alkuluku tai nolla. Toisaalta tämän faktan todistus on suora yleistys yllä esitetystä päättelystä.)

Siis kaikilla $x \in K$ pätee $x + x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = x \cdot (1 + 1) = x \cdot 0 = 0$. (Ryhmäteoriaa tuntevat tunnistavat ryhmän jo tässä vaiheessa Kleinin neliryhmäksi.) Koska

0 on neutraalialkio, yhteenlaskutaulusta tunnetaan tässä vaiheessa 10 paikkaa. Loput selviävät sillä perusteella, ettei riveillä tai sarakkeilla voi olla toistoa.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0.