Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 2 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien 1–6 ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Olkoon $a \in R$. Tällöin

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0,$$

joten vähentämällä molemmilta puolilta $a \cdot 0$ saadaan

$$0 = a \cdot 0.$$

Vastaavasti nähdään, että $0 \cdot a = 0$.

Tehtävä 2. Alkio $a + 126\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/126\mathbb{Z}$ on kääntyvä, jos ja vain jos on olemassa $b \in \mathbb{Z}$, jolle $(a+126\mathbb{Z})(b+126\mathbb{Z}) = 1+126\mathbb{Z}$ eli $ab+126\mathbb{Z} = 1+126\mathbb{Z}$. Tämä pätee täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}$, että $1 = ab + 126n$. Diofantoksen yhtälöistä tiedetään algebran peruskursseilta, että

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \colon cx + dy = 1 \iff \mathrm{syt}(c, d) = 1,$$

kun $c, d \in \mathbb{Z}$. Sovelletaan tätä kertoimiin a ja 126 sekä tuntemattomiin b ja n: $a + 126\mathbb{Z}$ on kääntyvä, jos ja vain jos $\mathrm{syt}(a, 126) = 1$. Alkutekijäesityksen $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ avulla saadaan kääntyvien alkioiden joukoksi

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z}/126\mathbb{Z})^* &= \{a + 126\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{126} \mid \mathrm{syt}(a, 126) = 1\} \\
&= \{a + 126\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{126} \mid 2 \nmid a, 3 \nmid a, 7 \nmid a\} \\
&= \{\pm a + 126\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{126} \mid a \in I\},
\end{aligned}$$

missä

$$I = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61\}.$$

Tehtävä 3. a) Määritellään $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ (yleisemmin tässä sopii esimerkiksi mikä tahansa kahden origon kautta kulkevan suoran yhdiste). A on selvästi vakaa skalaarilla kertomisen suhteen, mutta ei yhteenlaskun suhteen, sillä $(1, 0), (0, 1) \in A$ ja $(1, 1) \notin A$.

b) Määritellään $B = \mathbb{Z}^2$. Selvästi B on vakaa yhteenlaskun suhteen, mutta ei skalaarilla kertomisen suhteen, sillä $(1,0) \in B$, mutta $(\pi, 0) = \pi(1,0) \notin B$.

Aivan toisenlaisen esimerkin saisi jälkimmäiseen kohtaan valitsemalla joukoksi jonkin tason suljetuista neljänneksistä tai yleisemmin minkä tahansa taso kulman (mukaan lukien kylkien väliin jäävä alue), missä kärki on origossa.

Tehtävä 4. *Tapa 1 á la VP:* Ryhmälle $\mathbb{Z}_2$ ei voida antaa $\mathbb{Z}_3$-modulirakennetta. Osoitetaan tämä tekemällä vastaoletus, että $\otimes\colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ on skalaarikerronta joka tekee ryhmästä $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$-modulin. Nyt

$$\begin{aligned}
1 + 2\mathbb{Z} &= 1 + 1 + 1 + 2\mathbb{Z} \\
&= (1 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 2\mathbb{Z}) \\
&= (1 + 3\mathbb{Z}) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 3\mathbb{Z}) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) + (1 + 3\mathbb{Z}) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) \\
&= \big((1 + 3\mathbb{Z}) + (1 + 3\mathbb{Z}) + (1 + 3\mathbb{Z})\big) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) \\
&= (1 + 1 + 1 + 3\mathbb{Z}) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) \\
&= (0 + 3\mathbb{Z}) \otimes (1 + 2\mathbb{Z}) \\
&= 0 + 2\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

mikä on mahdotonta.

Edellistä ideaa voi varioida monella tavalla, saatikka sitten, että muunkinlaisia esimerkkejä on:

Tapa 2 á la OO: Osoitetaan, että reaalilukujen yhteenlaskuryhmää $(\mathbb{R}, +)$ ei voi varustaa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruuden rakenteella. Jos tämä olisi mahdollista, saataisiin vektoriavaruuden laskulakien perusteella nimittäin

$$2\pi = \pi + \pi = 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cdot \pi + 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cdot \pi = (1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})\pi = 0_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\pi = 0,$$

mikä on mieletöntä.

Tehtävä 5. Olkoon $x, y \in G$ ja $f, g \in H$. Nyt

1) $f \cdot (x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = fx + fy$,

2) $(f + g)x = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = fx + gx$,

3) $f \cdot (g \cdot x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (f \circ g)x$,

4) $1x = \mathrm{id}(x) = x$.

Siispä G on H-moduli.

Tehtävä 6. Aloitetaan Abelin ryhmän aksioomista. Olkoon $A, B, C \subseteq X$.

- Todetaan ensin, että laskutoimitus on vaihdannainen: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$.

- $(A \triangle B) \triangle C = \Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \triangle C = \bigg(\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \setminus C\bigg) \cup \bigg(C \setminus \Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big)\bigg) = \Big(A \setminus (B \cup C)\Big) \cup \Big(B \setminus (A \cup C)\Big) \cup \bigg(C \setminus \Big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\Big)\bigg) = \Big(A \setminus (B \cup C)\Big) \cup \Big(B \setminus (A \cup C)\Big) \cup \Big(C \setminus (A \cup B)\Big) \cup (A \cap B \cap C)$. Viimeinen joukko on selvästi aina sama joukkojen A, B ja C järjestyksestä riippumatta, joten myöskin $A \triangle (B \triangle C) = (C \triangle B) \triangle A$ on yhtäsuuri viimeisen joukon kanssa. Siis
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

- Triviaalisti $\emptyset \triangle A = A$, eli $\emptyset$ on neutraalialkio.

- Selvästi myös $A \triangle A = \emptyset$, joten A on itsensä vasta-alkio.

Siis $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ on Abelin ryhmä. Huomaa, että kahdessa viimeisessä kohdassa riittää osoittaa vain toinen aksiooman yhtäsuuruuksista, koska laskutoimituksen vaihdannaisuus antaa jäljelle jäävän yhtäsuuruuden.

Tunnetusti $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on kunta.

Osoitetaan nyt, että ryhmä $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ voidaaan varustaa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruuden rakenteella tehtävässä selitetyllä tavalla. Olkoot $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ja $a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1) Jos $a = \bar{0}$, niin $a \cdot (A \triangle B) = \bar{0} \cdot (A \triangle B) = \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (\bar{0} \cdot A) \triangle (\bar{0} \cdot B)$, jos taas $a = \bar{1}$, niin $a \cdot (A \triangle B) = \bar{1} \cdot (A \triangle B) = A \triangle B = (\bar{1} \cdot A) \triangle (\bar{1} \cdot B)$.

2)
$$(a+b)A = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } a = b = \bar{0} \text{ tai } a = b = \bar{1}, \\ A, & \text{jos } a \neq b, \end{cases}$$
ja
$$aA \triangle bA = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } a = b = 0 \\ A, & \text{jos } a \neq b, \\ A \triangle A, & \text{jos } a = b = 1, \end{cases} = \begin{cases} \emptyset, & a = b = 0 \text{ tai } a = b = 1 \\ A, & a \neq b, \end{cases}$$
sillä $A \triangle A = \emptyset$. Siispä $(a+b)A = aA \triangle bA$.

3) Jos $b = \bar{1}$, niin $bA = A$ ja $ab = a$, joten $(ab)A = aA = a(bA)$. Jos taas $b = \bar{0}$, niin $bA = \emptyset$, $ab = \bar{0}$ja $(ab)A = \bar{0} \cdot A = \emptyset = a \cdot \emptyset = a(bA)$.

4) Viimeinen laskulaki pätee suoraan asetetun skalaaritulon määritelmän nojalla.

Näin ollen $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ on $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruus.