Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 3 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. a) Tietenkin $(R[x], +)$ on Abelin ryhmä, koska polynomirengas $(R[x], +, \cdot)$ on rengas. Riittää siis osoittaa, että modulin neljä laskulakia pätevät. Olkoot siis $f, g \in R[x]$ ja $r, s \in R$. Kirjoitetaan $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ja $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$.

1) Olkoon $k = \max\{m, n\}$ ja tulkitaan $a_i = 0$ ja $b_j = 0$, kun $i > n$ ja $j > m$. Nyt

$$\begin{aligned} r(f+g) &= r(a_0+b_0) + r(a_1+b_1)x + \cdots + r(a_k+b_k)x^k \\ &= ra_0 + ra_1x + \cdots + ra_nx^n + rb_0 + rb_1x + \cdots + rb_mx^m \\ &= rf + rg, \end{aligned}$$

2) $(r+s)f = (r+s)a_0 + (r+s)a_1x + \cdots + (r+s)a_nx^n$
$= ra_0 + ra_1x + \cdots + ra_nx^n + sa_0 + sa_1x + \cdots + sa_nx^n = rf + sf$

3) $r(sf) = r(sa_0 + sa_1x + \cdots + sa_nx^n) = rsa_0 + rsa_1x + \cdots + rsa_nx^n = (rs)f$

4) $1f = 1a_0 + 1a_1x + \cdots + 1a_nx^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = f$

b) Vektoriavaruuden neljä laskulakia pätevät, koska skalaarikertominen on yksinkertaisesti kunnan K kertolasku, jolloin vektoriavaruuden laskulait ovat osa renkaan laskulaeista. Siis K on L-vektoriavaruus.

Jos rengas R ei ole kokonaisalue, niin on olemassa $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $v \in R[x] \setminus \{0\}$ s.e. $av = 0$. Jos esimerkiksi valitaan $R = \mathbb{Z}_4$, niin $2 + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, $2 + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_4[x] \setminus \{0\}$ ja $(2 + 4\mathbb{Z}) \cdot (2 + 4\mathbb{Z}) = 4 + 4\mathbb{Z} = 0 + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_4[x]$.

Tehtävä 2. Lineaarialgebra 1 -kursseilta tiedetään, että kaikilla matriiseilla A, B, X, Y pätee

1) $A(X + Y) = AX + AY$,

2) $(A + B)X = AX + BX$,

3) $A(BX) = (AB)X$,

4) $IX = X$,

aina kun tulot on määritelty ja missä I on identiteettimatriisi. Tulkitsemalla ryhmän $\mathbb{R}^n$ alkiot $(n \times 1)$-matriiseiksi nähdään, että matriisitulo antaa $M_n(\mathbb{R})$-modulirakenteen ryhmälle $\mathbb{R}^n$.

Tehtävä 3. On helpompaa laskea ensin, kuinka moni osajoukko $S \subseteq V$ *ei viritä* avaruutta V. Joukot $\mathrm{sp}(S)$ ovat paitsi aliavaruuksia, myös aliryhmiä, joten niiden mahdolliset koot ovat Lagrangen lauseen mukaan 1, 3 ja 9. Jos siis $|S| \geq 4$, niin S väistämättä virittää koko avaruuden. Jos $|S| \leq 3$, niin on mahdollista, että $\mathrm{sp}(S)$ on triviaali aliavaruus tai kolmen vektorin aliavaruus, jolloin on olemassa $a \in V$, jolle $\mathrm{sp}(S) = \{-a, \bar{0}, a\}$. Näistä havainnoista seuraa, että S ei viritä V:tä täsmälleen silloin, kun jollakin $a \in V$ pätee $S \subseteq \{-a, \bar{0}, a\}$.

Kun $a \in V \setminus \{\bar{0}\}$, niin joukolla $\{-a, \bar{0}, a\}$ on $2^3 = 8$ osajoukkoa, missä on mukana $\emptyset$ ja $\{\bar{0}\}$. Huomattakoon, että $\{-a, \bar{0}, a\} \neq \{-b, \bar{0}, b\}$, missä $a, b \in V \setminus \{\bar{0}\}$, jos ja vain jos $a \neq b$ ja $a \neq -b$. Ositetaan $V \setminus \{\bar{0}\}$ neljäksi pariksi $\{(-1,0),(1,0)\}$, $\{(0,-1),(0,1)\}$, $\{(-1,-1),(1,1)\}$ ja $\{(1,-1),(-,1)\}$. Jokaista tällaista paria $\{-a, a\}$ vastaa siis kaksi kaikille pareilla yhteistä joukon $S = \{-a, \bar{0}, a\}$ osajoukkoa $\emptyset$ ja $\{\bar{0}\}$ sekä 6 parille ominaista osajoukkoa. Yhteensä joukkoja, jotka eivät viritä V:tä, on siis $2 + 4 \cdot 6 = 26$. Kaikkiaan virittäjistöjen lukumäärä on siten

$$2^{|V|} - 26 = 2^9 - 26 = 512 - 26 = 486.$$

Tehtävä 4. U_1 *ei ole aliavaruus*: Tarkastellaan esimerkkinä vakiojonoa $a = (1)_{k \in \mathbb{N}}$. Tällöin $a \in S$ ja $-a \in S$, mutta näiden summa $a + (-a) = \bar{0}$ on nollajono, jolle sarja $\sum_k^\infty 0 = 0$ tietenkin suppenee ja siis $\bar{0} \notin S$.

U_2 *on aliavaruus*: Olkoon $(a_i), (b_i) \in U_2$ ja $a \in \mathbb{R}$.

1) Koska jonoilla (a_i) ja (b_i) pätee $a_p = a_0$ ja $b_p = b_0$ kaikilla alkuluvuilla p, niin myös jonolla $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$ pätee $a_p + b_p = a_0 + b_0$ kaikilla alkuluvuilla p. Siispä $(a_i) + (b_i) \in U_2$.

2) Koska $a_p = a_0$ kaikilla alkuluvuilla p, niin myös $aa_p = aa_0$ kaikilla alkuluvuilla p. Siispä $a(a_i) = (aa_i) \in U_2$.

3) Selvästi $0 = (0) \in U_2$.

U_3 *on aliavaruus*: Olkoon $(a_i), (b_i) \in U_3$ ja $a \in \mathbb{R}$.

1) Koska $\sin k > 0 \Rightarrow a_k = b_k = 0$, niin myös pätee $\sin k > 0 \Rightarrow a_k + b_k = 0$. Siispä $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \in U_3$.

2) Koska $\sin k > 0 \Rightarrow a_k = 0$, niin myös pätee $\sin k > 0 \Rightarrow aa_k = 0$. Siispä $a(a_i) = (aa_i) \in U_3$.

3) Selvästi $0 = (0) \in U_3$.

Tehtävä 5. Tehdään joukolle $\{\sin, \cos, \exp\}$ vapaustesti. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$ skalaareja, joille $a \sin + b \cos + c \exp = 0$ eli

$$(a \sin + b \cos + c \exp)(x) = a \sin(x) + b \cos(x) + c \exp(x) = 0$$

kun $x \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan lineaarikombinaatiota sopivissa kohdissa x. Sijoitettamalla vuoroin $x = 0$, vuoroin $x = \pi$, saadaan

$$\begin{cases} 0 = a\sin 0 + b\cos 0 + ce^0 = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 + b + c = b + c \\ 0 = a\sin\pi + b\cos\pi + ce^\pi = a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot \mathrm{e}^\pi = 0 - b + ce^\pi = -b + ce^\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c + b = 0 \\ ce^\pi - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1 + \mathrm{e}^\pi)c = 0 \\ c + b = 0. \end{cases} \iff b = c = 0.$$

Siis $a = b = c$, joten $\{\sin, \cos, \exp\}$ on vapaa. Toisaalta valitsemalla $x = \pi/2$ saadaan $0 = a\sin(\pi/2) + b\cos(\pi/2) + ce^{\pi/2} = a \cdot 1 + 0 + 0 = a$, joten $a = b = c = 0$ ja joukko $\{\sin, \cos, \exp\}$ on vapaa.

Tehtävä 6. Olkoot $V_0, \ldots, V_{n-1} \subseteq V$ $(n \in \mathbb{N})$ epätriviaaleja V:n aliavaruuksia, joille $V = V_0 \cup \cdots \cup V_{n-1}$. Osoitetaan, että $V = V_i$ jollakin $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Voidaan olettaa, että $V_0 \neq V$, joten on olemassa $b \in (V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}) \setminus V_0$.

Olkoon $a \in V_0$. Tarkastellaan alkioita $a + kb$, missä $k \in K \setminus \{0\}$. Näitä alkioita on äärettömän monta, koska K on ääretön. Jos pätisi $a + kb \in V_0$, niin tällöin pätisi myös $kb = a + kb - a \in V_0$ ja edelleen $b = k^{-1}kb \in V_0$, mikä on vastoin oletusta. Siispä $a + kb \notin V_0$ kaikilla $k \in K \setminus \{0\}$ jolloin siis $a + kb \in V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ kaikilla $k \in K \setminus \{0\}$. Koska näitä alkioita on äärettömän monta, niin jossakin aliavaruudessa V_i, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on oltava äärettömän monta tällaista alkiota. Erityisesti on olemassa $k, l \in K \setminus \{0\}$, joille $k \neq l$ ja $a + kb, a + lb \in V_i$. Tällöin myös $(k-l)b = a + kb - (a + lb) \in V_i$, mistä seuraa, että $b \in V_i$ ja $a = (a + kb) - kb \in V_i$. Erityisesti siis $a \in V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$. Näin ollen $V_0 \subseteq V_2 \cup \cdots \cup V_n$, joten $V = V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ ja voidaan unohtaa V_0 tarkastelusta. Induktiolla voidaan siis osoittaa, että $V_i = V$ jollakin i.