Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 4 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien 1, 2, 3 ja 5 ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Olkoon $S \subseteq \mathbb{Q}$ äärellinen, ts. $S = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Valitaan $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ ja $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{Z}_+$, joille $q_i = a_i/b_i$, kun $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Osoitetaan, että $\operatorname{sp}(S) \neq \mathbb{Q}$. Laventamalla jokaista alkiota

$$q_i = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_i b_1 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_n}{b_1 \cdots b_n},$$

voidaan olettaa, että $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = b$. Osoitetaan, että $1/(2b) \notin \operatorname{sp}(S)$. Olkoot siis $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Nyt $c_0 a_0 + \cdots c_{n-1} a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, joten

$$c_0 \frac{a_0}{b} + \cdots + c_{n-1} \frac{a_{n-1}}{b} = \frac{c_0 a_0 + \cdots + c_{n-1} a_{n-1}}{b} \neq \frac{\frac{1}{2}}{b} = \frac{1}{2b}.$$

Siis $1/(2b) \notin \operatorname{sp}(a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$.

Tehtävä 2. Ehdon välttämättömyys: Oletetaan, että $S \cup T$ on V:n aliavaruus ja $S \not\subseteq T$. On siis olemassa $a \in S \setminus T$. Tiedetään, että jokaisella $b \in T$ pätee $a+b \in S \cup T$ eli $a+b \in S$ tai $a + b \in T$. Jälkimmäinen on mahdotonta, sillä tällöin pätisi myös $a = a + b - b \in T$. Siis $a + b \in S$, ja edelleen $b = a + b - a \in S$. Siis $T \subseteq S$.

Ehdon riittävyys: Jos $S \subseteq T$, niin $S \cup T = T$ on V:n aliavaruus. Vastaavasti jos $T \subseteq S$, niin $S \cup T = S$ on V:n aliavaruus.

Tehtävä 3. Harjoitustehtävän 2.5 mukaan asettamalla kaikilla $A, B \subseteq X$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

saadaan X:n potenssijoukosta $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruus. Olkoon $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kanta. Tällöin jokaisella $A \subseteq X$ on olemassa yksikäsitteinen kertoimet $\lambda_B \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $B \in \mathcal{B}$, joille

$$A = \triangle_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B B.$$

Kun merkitään $\mathcal{F} = \operatorname{supt}((\lambda_B)_{B \in \mathcal{B}})$ ja huomataan, että kantajan $\mathcal{F}$ täytyy olla äärellinen ja $\lambda_F = \bar{1}$, kun $F \in \mathcal{F}$, niin joukolle A saadaan yksikäsitteinen esitys

$$A = \triangle_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Todistetaan induktiolla äärellisen perheen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ koon $n = |\mathcal{A}|$ suhteen, että kaikill $x \in X$ on voimassa

$$x \in \triangle_{A \in \mathcal{A}} A \iff x \in A \text{ parittoman monella } A \in \mathcal{A}.$$

1° Tapaukset $n = 0$ ja $n = 1$ ovat selviä. (Abelin ryhmässä $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ määritellään $\triangle_{A \in \emptyset} A = \emptyset$.)

2° Olkoon sitten $n > 1$. Induktio-oletuksen mukaan väite pätee kaikilla perheillä $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(X)$, joille $|\mathcal{A}'| < n$.

Kiinnitetään jokin $A_0 \in \mathcal{A}$, jolloin $\triangle_{A \in \mathcal{A}} A = A_0 \triangle \triangle_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}} A$. Olkoon $x \in X$. Jos $x \notin A_0$, niin induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} & x \in \triangle_{A \in \mathcal{A}} A = A_0 \triangle \triangle_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}} A \\ \iff & x \in \triangle_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}} A \\ \iff & x \in A \text{ parittoman monella } A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\} \\ \iff & x \in A \text{ parittoman monella } A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Jos taas $x \in A_0$, niin induktio-oletuksesta seuraa

$$\begin{aligned} & x \in \triangle_{A \in \mathcal{A}} A = A_0 \triangle \triangle_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}} A \\ \iff & x \notin \triangle_{A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}} A \\ \iff & x \in A \text{ parillisen monella } A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\} \\ \iff & x \in A \text{ parittoman monella } A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Nyt, jokaisella $A \subseteq X$ on olemassa yksikäsitteinen $\mathcal{F}$, jolle

$$x \in A, \text{ jos ja vain jos } \text{ parittoman monella } F \in \mathcal{F} \text{ pätee } x \in F.$$

Tehtävä 4. Tehdään vapaustesti joukolle $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1, |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|\}$: Olkoot $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ skalaareja, joille

$$\lambda \, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \mu(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1) + \nu |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}| = \bar{0}$$

eli jokaisella $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda \, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) + \mu(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1)(x) + \nu |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|(x) = \bar{0}(x) = 0 \iff \lambda x + \mu(x+1) + \nu|x| = 0.$$

Tarkastelemalla tilannetta kohdassa $x = 0$ saadaan

$$0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + \nu|0| = \mu.$$

Siis $\mu = 0$ ja kohdista $x = 1$ ja $x = -1$ saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \lambda \cdot 1 + \nu|1| = 0 \\ \lambda \cdot (-1) + \nu|-1| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \nu = 0.$$

Siis vapaustesti menee läpi.

Vastaus: Joukko $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1, |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|\}$ on vapaa.

Tehtävä 5. Tarkastellaan yhtälöä $x(c, 1, 0) + y(1, c, 1) + z(0, 1, c) = 0$, eli

$$\begin{cases} xc + y = 0 \\ x + yc + z = 0 \\ y + zc = 0 \end{cases}$$

Jos $c = 0$, niin valitsemalla $x = 1, y = 0, z = -1$ yhtälö toteutuu. Siis jono ei ole vapaa, jos $c = 0$.

Jos $c \neq 0$, niin ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä nähdään, että $x = z$. Siispä yhtälöryhmä saadaan muotoon

$$\begin{cases} xc + y = 0 \\ 2x + yc = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Sijoittamalla toiseen yhtälöön $y = -xc$ saadaan $(2-c^2)x = 0$. Koska $c \in \mathbb{Q}$, niin $c^2 \neq 2$, joten $x = 0$. Edelleen $y = -xc = 0$ ja $z = x = 0$. Siispä jono on vapaa, kun $c \neq 0$.

Vastaus: Jono on vapaa, kunhan $c \neq 0$.

Tehtävä 6.

1) Koska tyhjästä joukosta ei voida muodostaa epätriviaaleja lineaarikombinaatioita, niin $\emptyset$ on triviaalisti vapaa.

2) Tehdään vapaustesti joukolle A. Oletetaan siis, että

$$\sum_{x \in A} \lambda_x x = 0,$$

missä $\lambda_x \in K$, kun $x \in A$, ja kerroinjono on äärellisluonteinen. Merkitään myös $\lambda_x = 0$, kun $x \in B \setminus A$. Tällöin

$$\sum_{x \in B} \lambda_x x = 0,$$

joten joukon B vapauden nojalla kaikilla $x \in B$ pätee $\lambda_x = 0$, siis myös silloin, kun $x \in A$. Siis A on vapaa.

3) Edellisen kohdan nojalla ehdon välttämättömyys on selvä. Oletetaan sitten, että jokainen äärellinen $A_0 \subseteq A$ on vapaa. Oletetaan, että

$$\sum_{x \in A} \lambda_x x = 0,$$

missä kertoimet ovat K:sta ja kerroinjono äärellisluonteinen. Äärellisluonteisuus merkitsee, että

$$A_0 = \operatorname{supt}((\lambda_x)_{x \in A})$$

on äärellinen. Lisäksi huomataan, että

$$\sum_{x \in A_0} \lambda_x x = \sum_{x \in A} \lambda_x x = 0,$$

joten joukon A_0 vapauden nojalla $\lambda_x = 0$ kaikilla $x \in A_0$. Toisaalta kaikilla $x \in A \smallsetminus A_0$ pätee $\lambda_x = 0$ kantajan määritelmän nojalla. Siis A on vapaa.

4) Koska A on vapaa, niin $\mathrm{sp}(A)$:ssa se on vapaa virittäjistö eli kanta. Kaikille vapaille joukoille $I \subseteq \mathrm{sp}(A)$ pätee kantalauseen seurauksien nojalla $|I| \leq \dim(\mathrm{sp}(A)) = |A|$, joten koska $|A| < |B|$ ja B on vapaa, niin $B \not\subseteq \mathrm{sp}(A)$. Valitaan $x \in B \setminus \mathrm{sp}(A)$. Tällöin $A \cup \{x\}$ on vapaa ja $x \in B \setminus A$.