Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 5 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien 1–5 ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Olkoon $E \subseteq V$ ääretön kanta. Tällöin E:llä on aito osajoukko $F \subsetneq E$, jolle $|F| = |E|$. Tarkastellaan V:n aliavaruutta $U = \operatorname{sp}(F)$. Koska E on kantana vapaa, niin jokaiselle $x \in E \setminus F$ pätee $x \notin \operatorname{sp}(F)$, joten

$$U = \operatorname{sp} F \subsetneq \operatorname{sp} E = V.$$

Siis U on V:n aito aliavaruus, jolle

$$\dim(U) = |F| = |E| = \dim V.$$

Tehtävä 2.

a) Jos $p = 2$, niin $e_0'+e_1'+e_2' = (0,1,1)+(1,0,1)+(0,0,1) = (1+1,1+1,1+1) = (0,0,0)$, joten E' on sidottu eikä ole kanta. Jos taas $p \neq 2$, niin samainen lasku tuottaa tuloksen $e_0'+e_1'+e_2' = (0,1,1)+(1,0,1)+(0,0,1) = (1+1,1+1,1+1) = (2,2,2)$, joten $(1,1,1) = 2^{-1}(e_0'+e_1'+e_2') \in \operatorname{sp}(E')$. Koska $(1,1,1) \in \operatorname{sp}(E')$ ja $e_i' = (1,1,1)-e_i \in E'$, niin $e_i = (1,1,1) - e_i' \in \operatorname{sp}(E')$, kun $i \in \{0,1,2\}$. Siis $E \subseteq \operatorname{sp}(E')$, mistä seuraa, että E' on V:n virittäjistö. Koska $|E'| = 3 = |E| = \dim(V)$, niin E' on V:n kanta.

   Vastaus: E' on kanta, jos ja vain jos $p \neq 2$.

b) $E_0 = E$ on triviaalisti kanta. $E_1 = \{e_0, e_1, e_0'\}$ on kanta, sillä $e_2 = (0,0,1) = 2e_1 + e_0' \in \operatorname{sp}(E_1)$, joten E_1 virittää koko avaruuden, jolloin se on myös vapaa, koska $|E_1| = 3 = \dim V$. $E_2 = \{e_0, e_1', e_0'\}$ on kanta, sillä $e_1 = (0,1,0) = e_0 + 2e_1' + e_0' \in \operatorname{sp}(E_2)$. $E_3 = E'$ on jo todettu yllä kannaksi.

Tehtävä 3. Sopivan esimerkin voi tietenkin muodostaa lukuisalla eri tavalla.

Tapa 1: Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Z}$. Sillä on luonnollinen kanta $\{1\}$, sillä $n \cdot 1 \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{Z} = \mathrm{sp}(\{1\})$.

Olkoon $S = \{2, 3\}$. Tällöin

$$\mathrm{sp}(S) = \{2m + 3n \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

algebran peruskurssilla opitun mukaisesti: koska $\mathrm{syt}\{2, 3\} = 1$, niin jokaisella $s \in \mathbb{Z}$ Diofantoksen yhtälöllä $2m + 3n = s$ on ratkaisu. Joukko S on tietenkin itse sidottu, sillä $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$. Joukon S aidot osajoukot eivät viritä koko $\mathbb{Z}$:aa, sillä $\mathrm{sp}(\{2\}) = 2\mathbb{Z}$ ja $\mathrm{sp}(\{3\}) = 3\mathbb{Z}$ (sekä $\mathrm{sp}(\emptyset) = \{0\}$). Siis $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z}$ on moduli, jolla on äärellinen kanta $\{1\}$, mutta jonka virittäjistö S ei sisällä mitään kantaa.

Tapa 2: Olkoon $M = \mathbb{Z}^2$, joka tulkitaan $\mathbb{Z}$-moduliksi. Tällä tietenkin on äärellinen kanta. Joukko $S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ on virittävä joukko joka ei sisällä kantaa. Osoitetaan ensin virittävyys: $(1, 0) = (3, 2) - (2, 2) \in \mathrm{sp}(S)$ ja $(0, 1) = (2, 3) - (2, 2) \in \mathrm{sp}(S)$.

Osoitetaan sitten, että S ei sisällä kantaa. Ensinnäkin, S ei ole kanta, sillä se ei ole vapaa: $0 = (0, 0) = 2(3, 2) + 2(2, 3) - 4(2, 2)$. Jokaisessa kannassa pitää tietenkin olla vähintään 2 alkiota, joten vielä pitää osoittaa, että $\{(2, 2), (2, 3)\}$, $\{(2, 2), (3, 2)\}$ ja $\{(2, 3), (3, 2)\}$ eivät ole kantoja.

Joukko $\{(2, 2), (2, 3)\}$ ei ole virittävä, sillä $(1, 0) \notin \mathrm{sp}\{(2, 2), (2, 3)\}$: jokaisella $(a, b) \in \mathrm{sp}\{(2, 2), (2, 3)\}$ selvästi pätee $2 \mid a$, mutta $2 \nmid 1$, joten $(1, 0) \notin \mathrm{sp}\{(2, 2), (2, 3)\}$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $(0, 1) \notin \mathrm{sp}\{(2, 2), (3, 2)\}$ joten myöskään $\{(2, 2), (3, 2)\}$ ei ole kanta.

Osoitetaan vielä lopuksi, että $(1, 0) \notin \mathrm{sp}\{(2, 3), (3, 2)\}$. Tehdään vastaoletus: $(1, 0) = a(2, 3) + b(3, 2) \in \mathrm{sp}\{(2, 3), (3, 2)\}$. Koska $0 = 3a + 2b$, niin on olemassa $x \in \mathbb{Z}$ s.e. $a = -2x$ ja $b = 3x$. Siis $1 = 2a + 3b = -4x + 9x = 5x$, mikä on tietenkin mahdotonta. Siis $(1, 0) \notin \mathrm{sp}\{(2, 3), (3, 2)\}$ joten $\{(2, 3), (3, 2)\}$ ei ole kanta.

Tehtävä 4. a) Koska A on lineaarikuvauksena ryhmähomomorfismi, niin

$$A(\bar{0}_L) = A(\bar{0}_L + \bar{0}_L) = A(\bar{0}_L) + A(\bar{0}_L),$$

mistä vähentämällä $A(\bar{0}_L)$ puolittain saadaan $\bar{0}_M = A(\bar{0}_L)$.

Kun $x \in L$, niin

$$A(-x) + A(x) = A(-x + x) = A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M,$$

joten $-Ax = A(-x)$.

b) $A(\bar{0}_L) = A(0_R \cdot \bar{0}_L) = 0_R \cdot A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M$.

Olkoon $x \in L$. Nyt $-A(x) = (-1_R)A(x) = A((-1_R)x) = A(-x)$.

Tehtävä 5. Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in C$. Kun $t \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} A(x+y)(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^s((x+y)(s))\mathrm{d}s = \int_0^t (\mathrm{e}^s x(s) + \mathrm{e}^s y(s))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^s y(s)\mathrm{d}s = A(x)(t) + A(y)(t) \\ &= (A(x) + A(y))(t) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} A(ax)(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^s (ax)(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^s ax(s)\mathrm{d}s \\ &= a\int_0^t \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s = aA(x)(t) \\ &= (aA(x))(t). \end{aligned}$$

Siksi $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ja $A(ax) = aA(x)$. Siis A on lineaarinen operaattori.

Jos $x \in C$, $x \neq \bar{0}$, niin kuvauksen x jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen suljettu väli $[a, b] = I \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, että x saa välillä I joko vain positiivisia arvoja tai vain negatiivisia arvoja. Tällöin

$$\begin{aligned} A(x)(b) - A(x)(a) &= \int_0^b \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s - \int_0^a \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^b \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s + \int_a^0 \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \mathrm{e}^s x(s)\mathrm{d}s \neq 0. \end{aligned}$$

Siis $A(x)(a) \neq A(x)(b)$, mistä seuraa $A(x) \neq \bar{0}$. Siis $\operatorname{Ker} A = \{\bar{0}\}$ ja A on injektio.

Huomataan, että $A(x)(0) = 0$ kaikilla $x \in C$. Kuitenkin esimerkiksi vakiofunktiolla $1 \in C$ pätee $1(0) = 1 \neq 0$, jolloin $1 \notin \operatorname{Im} A$. Siis $\operatorname{Im} A \neq C$.

Tehtävä 6. Oletetaan, että $x = x_0$ on yhtälön $A(x) = y_0$ ratkaisu eli $A(x_0) = y_0$. Merkitään S:llä kaikkien ratkaisujen joukkoa, ts. $S = A^{-1}[\{y_0\}]$. Olkoon $x \in x_0 + \operatorname{Ker}(A)$, jolloin $x = x_0 + t$, missä $t \in \operatorname{Ker}(A)$. Tällöin

$$A(x) = A(x_0 + t) = A(x_0) + A(t) = y_0 + \bar{0} = y_0,$$

joten $x \in S$. Siis $x_0 + \operatorname{Ker}(A) \subseteq S$.

Olkoon toisaalta $x \in S$ eli $A(x) = y_0$. Tällöin

$$A(x - x_0) = A(x) - A(x_0) = y_0 - y_0 = \bar{0}$$

eli $x - x_0 \in \mathrm{Ker}(A)$. Siis $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$. Tästä seuraa, että $S = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

Jälleen toivotut esimerkit pystyy muodostamaan monella tavalla.

Tapa 1 (á la PS): Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Z}$ ja sen lineaarikuvausta $A\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $A(x) = 2x$. Tällöin yhtälöllä $A(x) = 1$ ei ole lainkaan ratkaisuja, sillä $\mathrm{Im}(A) = 2\mathbb{Z}$ ja 1 on pariton. Toisaalta yhtälöllä $A(x) = 6$ on ratkaisu $x = 3$ eikä muita ratkaisuja, sillä $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Tapa 2: Tarkastellaan reaalisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvausta $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x, 0)$. Selvästi $Y = \mathrm{Ker}(A) = \{\, (0, y) \mid y \in \mathbb{R}\,\}$ ja $\mathrm{Im}(A) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Siis yhtälöllä $A(x, y) = (1, 1)$ ei ole lainkaan ratkaisuja ja yhtälön $A(x, y) = (3, 0)$ ratkaisujen joukko on $(3, 0) + Y$.