Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 6 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien 1–3 ja 6 ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Ensiksi havaitaan, ettei $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus $\mathbb{R}$ voi olla äärellisulotteinen, sillä silloin olisi $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^n$ jollain $n \in \mathbb{N}$, mikä on mahdotonta, sillä $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva ja $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva. Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ numeroituvasti ääretön ja vapaa. Joukko I voidaan tällöin esittää luettelona $I = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Koska viritys on äärellisluonteista, huomataan, että

$$\operatorname{sp}(I) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sp}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\}).$$

Joukko $V_n = \operatorname{sp}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\})$ on numeroituva, sillä $\dim(\mathbb{Q}^n) = n \dim(V_n)$, joten$\mathbb{Q}^n \cong V_n$. Siis $\operatorname{sp}(I)$ on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva. Erityisesti $\operatorname{sp}(I) \neq \mathbb{R}$. Koska tällainen I ei voilla $\mathbb{R}$:n kanta, niin päätellään, että $\mathbb{R}$:llä ei voi olla numeroituvaa kantaa.

Tehtävä 2. $\mathcal{P}_n$ on $R[x]$:n alimoduli, koska 1) nollapolynomi on selvästi joukossa, 2) kerrottaessa polynomia R:n alkiolla aste ei voi kasvaa, ja 3) polynomien summan aste on ylhäältä rajoitettu summattavien polynomien asteilla (vrt. seuraavaan tehtävään, jossa vastaava tarkastelu on tehty muodollisemmin).

Olkoot $p, q \in \mathcal{P}_n$ ja $a \in R$. Ensinnäkin $A(p) \in \mathcal{P}_n$, sillä

$$\deg(A(p)) \leq \max \deg(p), \deg(p(0)(1 + x + s^2)) \leq \max\{n, 2\} = n,$$

joten A todella on kuvaus $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$. Edelleen

$$\begin{aligned}
A(p+q) &= (p+q) - \Big((p+q)(0)\Big)(1 + x + x^2) \\
&= (p+q) - \Big((p(0) + q(0)\Big)(1 + x + x^2) \\
&= p - p(0)(1 + x + x^2) + q - q(0)(1 + x + x^2) \\
&= A(p) + A(q)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
A(ap) &= ap - \Big((ap)(0)\Big)(1 + x + x^2) \\
&= ap - a(p(0))(1 + x + x^2) \\
&= a\Big(p - p(0)(1 + x + x^2)\Big) \\
&= aA(x)
\end{aligned}$$

Siis A on lineaarikuvaus.

Osoitetaan, että $\operatorname{Im} A = \{p \in \mathcal{P}_n \mid p(0) = 0\} =: M$. Jos $p \in M$ niin selvästi $A(p) = p$, joten $p \in \operatorname{Im} A$. Toisaalta, jos $p \in \operatorname{Im} A$, eli $p = A(q)$ jollakin $q \in \mathcal{P}_n$, niin $p(0) = q(0) - q(0)(1+0+0^2) = q(0) - q(0) = 0$, joten $p \in M$. Siispä $\operatorname{Im} A = M$. Selvästi $M = \operatorname{sp}(\{x, x^2, \ldots, x^{n-1}\})$, joten $\dim \operatorname{Im} A = n - 1$.

Tehtävä 3. Sopimuksen mukaan $\deg(0) = -\infty < 0$, joten $0 \in \mathcal{P}_n$. Olkoot $a \in K$ ja $p, q \in \mathcal{P}_n$. Tällöin $\deg(ap) = \deg p < n$, kun $a \neq 0$. Jos taas $a = 0$, niin $ap = 0 \in \mathcal{P}_n$. Siispä $ap \in \mathcal{P}_n$. Lisäksi $\deg(p + q) \leq \max\{\deg p, \deg q\} < n$, joten $p + q \in \mathcal{P}_n$. $\mathcal{P}_n$ on siis $K[x]$:n aliavaruus.

Osoitetaan sitten, että $U \subseteq \mathcal{P}_4$ on aliavaruus. Selvästi $0 \in U$. Olkoot $a \in K$ ja $p, q \in U$. Tällöin

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = p(1) + q(1) = (p + q)(1)$$

ja

$$(ap)(0) = a(p(0)) = a(p(1)) = (ap)(1),$$

eli $p + q, ap \in U$. Siispä U on aliavaruus.

Osoitetaan sitten, että $S = \{1, x(x-1), x^2(x-1)\}$ on U:n kanta. Koska polynomien asteet eroavat toisistaan, joukko on vapaa. Olkoon $p \in U$. Tällöin myös $p(0) \in U$, koska kaikki vakiopolynomit ovat selvästi U:ssa. Siispä myös $q = p - p(0) \in U$. Nyt $q(1) = q(0) = 0$. Siis $x(x - 1) \mid q$, joten on olemassa $f \in K[x]$, jolle $q = x(x - 1)f$. Koska $\deg q < 4$, niin $\deg f < 2$. Siispä $f = ax + b$ joillakin $a, b \in K$. Siten

$$q = x(x - 1)f = x(x - 1)(ax) + x(x - 1)b = ax^2(x - 1) + bx(x - 1) \in \operatorname{sp} S.$$

Siispä myös $p = q + p(0) \in \operatorname{sp} S$. On siis osoitettu, että $U \subseteq \operatorname{sp} S$. Lisäksi $\operatorname{sp} S \subseteq U$ on selvää, sillä $S \subseteq U$. S on siis U:n kanta, joten $\dim U = 3$.

Tehtävä 4. a) Oletetaan, että A ei ole injektio. Tällöin $\operatorname{Ker}(A) \neq \{\bar{0}\}$, joten on olemassa $x \in U$, jolle $A(x) = \bar{0}$, vaikka $x \neq \bar{0}$. Kirjoitetaan x lineaarikombinaationa kannan E vektoreista,

$$x = \sum_{e \in E} \lambda_e e,$$

missä $\lambda_e \in K$, kun $e \in E$. Huomataan, että

$$\bar{0} = A(x) = A\Big(\sum_{e \in E} \lambda_e e\Big) = \sum_{e \in E} \lambda_e A(e).$$

Koska $x \neq \bar{0}$, jollakin $e \in E$ on voimassa $\lambda_e \neq 0$. Siis yo. yhtälö osoittaa, että jono $(A(e))_{e \in E}$ ei ole vapaa.

Toisinaan se, että $(A(e))_{e \in E}$ ei ole vapaa, johtuu siitä, että jonossa on toistoa. Osoitetaan esimerkin avulla, että on mahdollista, että $A[E]$ sen sijaan on vapaa. Olkoon U mikä tahansa vähintään kaksiulotteinen K-vektoriavaruus, missä myös kunta K on mielivaltainen. Kiinnitetään U:lle kanta E. Olkoon V mielivaltainen epätriviaali vektoriavaruus. Valitaan $y \in V \smallsetminus \{\bar{0}\}$. Tarkastellaan vakiokuvausta $f\colon E \to V$, $f(e) = y$.

Tämä laajenee yksikäsitteisesti lineaarikuvaukseksi $A\colon U \to V$, jolle $A \upharpoonright E = f$. Koska U on vähintään kaksiulotteinen, kannassa on vähintään kaksi vektoria, joten on olemassa $e, e' \in E$, $e \neq e'$, joille $f(e) = y = f(y')$. Siis kuvaus f ei ole injektio, eikä myöskään sen laajennus A. Kuitenkin $A[E] = \{y\}$ on vapaa joukko, sillä $y \neq \bar{0}$.

b) Luennoilla todistetun lauseen mukaan

$$\operatorname{sp}(A[E]) = A[\operatorname{sp}(E)] = A[U] \neq V,$$

sillä E on kantana virittöjistö ja A ei ole surjektio. Siis $A[E]$ ei ole V:n virittäjistö.

Tehtävä 5. Merkitään avaruuden $(\mathbb{Z}_p)^m$ standardikantaa symbolilla E, jolloin $|E| = m$. (E voisi olla mikä tahansa kanta, mutta standardikannasta tiedetään heti sen koko.) Lineaarikuvaus $A\colon (\mathbb{Z}_p)^m \to (\mathbb{Z}_p)^n$ määräytyy rajoittumasta $A \upharpoonright E$, ts. jos lineaarikuvauksille $A, B\colon (\mathbb{Z}_p)^m \to (\mathbb{Z}_p)^n$ pätee $A \upharpoonright E = B \upharpoonright E$, niin $A = B$, ja jokaista $f\colon E \to (\mathbb{Z}_p)^n$ vastaa lineaarikuvaus $A\colon (\mathbb{Z}_p)^m \to (\mathbb{Z}_p)^n$, jolle $A \upharpoonright E = f$. Siis lineaarikuvauksia $A\colon (\mathbb{Z}_p)^m \to (\mathbb{Z}_p)^n$ on yhtä monta kuin kuvauksia $f\colon E \to (\mathbb{Z}_p)^n$. Jälkimmäisten lukumäärä on

$$|{}^{E}((\mathbb{Z}_p)^n)| = |(\mathbb{Z}_p)^n|^{|E|} = (p^n)^m = p^{mn}.$$

Tehtävä 6. Tarkastellaan jonoavaruutta $V = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, joka on luonnollisella tavalla $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, ja siirto-operaattoria $A\colon V \to V$,

$$A((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\operatorname{Ker} A$ ei ole triviaali, sillä esimerkiksi jonolle $e = (\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}} \neq \bar{0}$ pätee $A(e) = \bar{0}$. (Itse asiassa $\operatorname{Ker} A = \operatorname{sp}(\{e\})$.) Sen sijaan $\operatorname{Im} A = V$, sillä kun $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, niin jonolle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 0 \\ x_{n-1}, & \text{muuten} \end{cases}$$

pätee $A(x) = y$.

Huomautus: Itse asiassa idea yleistyy kaikkiin ääretönulotteisiin vektoriavaruuksiin. Jos nimittäin V on vektoriavaruus ja E sen ääretön kanta, niin voidaan valita $F \subsetneq E$, jolle $|F| = |E|$. On siis olemassa bijektio $g\colon F \to E$, joka laajenee kuvaukseksi $h\colon E \to E$, joka ei ole injektio. Tämän laajennus lineaarikuvaukseksi $A\colon V \to V$ ei ole injektio mutta on surjektio, joten se täyttää esimerkiltä vaadittavat ehdot.