Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 7 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Koska $x \neq 0$, yksiö $\{x\}$ on vapaa. Siis on olemassa kanta $E \subseteq V$, jolle $\{x\} \subseteq E$ eli $x \in E$. Tarkastellaan kuvausta $f\colon E \to Z$, jolle $f(x) = z$ ja $f(e) = \bar{0}$, kun $e \in E \setminus \{x\}$. Tiedetään, että tämä voidaan laajentaa lineaarikuvaukseksi $A\colon V \to Z$, jolle $A \restriction E = f$, jolloin $A(x) = f(x) = z$.

Tehtävä 2. Huomataan, että joukko $S = \{y, e_0, e_1, \dots\} \subseteq s$ on vapaa: Olkoon $(\lambda_e)_{e \in S}$ äärellisluonteinen jono reaalisia kertoimia. Äärellisluonteisuuden nojalla on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että $\lambda_{e_i} = 0$, kun $i \in \mathbb{N}$ ja $i \geq k$. Merkitään $x = \sum_{e \in S} \lambda_e e$ ja oletetaan, että $x = \bar{0}$. Tällöin $0 = x(k+1) = \lambda_y y(k+1) = \lambda_y$. Tämän vuoksi

$$\bar{0} = x = (\lambda_{e_0}, \cdots, \lambda_{e_k}, 0, 0, \cdots,),$$

joten myös pätee $\lambda_{e_i} = 0$, kun $i \in \mathbb{N}$ ja $i \geq k$.

Koska S on vapaa, on olemassa kanta $E \subseteq s$, jolle $S \subseteq E$. Olkoon $f\colon E \to s$,

$$f(e) = \begin{cases} y + 24e_7 & \text{kun } e = y \\ e & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tiedetään, että f laajenee yksikäsitteisellä tavalla lineaarikuvaukseksi $A\colon s \to s$.

A on surjektio, sillä $y = A(y - 24e_7) \in \operatorname{Im} A$ ja $e = A(e) \in \operatorname{Im} A$ kaikilla $e \in E \setminus \{y\}$, jolloin $E \subseteq \operatorname{Im} A$ ja edelleen $s = \operatorname{sp} E \subseteq \operatorname{Im} A$. Lisäksi A on injektio, sillä

$$\begin{aligned} 0 = A\left(\sum_{e \in E} a_e e\right) &= a_y y + (a_{e_7} + 24a_y)e_7 + \sum_{\substack{e \in E, \\ e \neq y, e_7}} a_e e \\ &\Rightarrow a_y = 0 \wedge a_{e_7} + 24a_y = 0 \wedge \forall e \in E \setminus \{y, e_7\}\ (a_e = 0) \\ &\Rightarrow \forall e \in E\ (a_e = 0) \\ &\Rightarrow \sum_{e \in E} a_e e = 0. \end{aligned}$$

eli $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Siis A on lineaarinen automorfismi.

Tehtävä 3. Valitaan

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}, \\ U' &= U, \\ V &= \{(0,0,z,t) \mid z,t \in \mathbb{R}\} \text{ ja} \\ V' &= \{(0,y,z,t) \mid y,z,t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Selvästi $U \cap V = \{(0,0,0,0)\}$, joten suoruuskriteerin mukaan summa $U + V$ on suora. Lisäksi jokainen $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ voidaan esittää muodossa

$$(x,y,z,t) = (x,y,0,0) + (0,0,z,t) \in U + V,$$

joten $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Koska $U \subseteq U'$ ja $V \subseteq V'$, pätee myös $U' + V' = \mathbb{R}^4$. Summa $U' + V'$ ei kuitenkaan ole suora, sillä $(0,1,0,0) \in U' \cap V'$, joten $U' \cap V' \neq \{(0,0,0,0)\}$.

Tehtävä 4. Olkoot L_0 ja L_1 $\mathbb{Z}$-modulin $\mathbb{Q}$ aitoja, epätriviaaleja alimoduleita. Koska Ł$_0$ ja L_1 ovat epätriviaaleja, voidaan valita $q_i \in L_i \setminus \{0\}$, kun $i \in \{0,1\}$. Esitetään q_0 ja q_1 edelleen murtolukuina: $q_i = m_i/n_i$, missä $m_i, n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, kun $i \in \{0,1\}$. Koska $q_0 \in L_0$ ja L_0 on $\mathbb{Z}$-moduli, niin

$$m_0 m_1 = (m_1 n_0) q_0 \in L_0.$$

Vastaavasti saadaan $m_0 m_1 \in L_1$. Koska $m_0 m_1 \neq 0$, niin $L_0 \cap L_1 \neq \{0\}$, joten summa $L_0 + L_1$ ei ole suora. Erityisesti etsitynlainen esitys $\mathbb{Q} = L_0 + L_1$ on mahdoton.

Tehtävä 5. a) Olkoon $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Määritellään kuvaus $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(0) - 2f(0)x$. Nyt

$$\int_0^1 l(x)dx = 0$$

joten $l \in Z$. Lisäksi $(f - l)(0) = 0$, joten $f - l \in U$. Siispä $f = (f - l) + l \in U + Z$, joten $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = U + Z$.

Summa ei ole suora, sillä esimerkiksi $\big(x \mapsto \sin(2\pi x)\big) \in U \cap Z$.

b) Merkitään vakiokuvauksien aliavaruutta $\mathbb{R} \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nyt selvästi $\mathbb{R} \cap Z = \{0\}$, joten summa $\mathbb{R} + Z$ on suora. Lisäksi kaikilla $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pätee

$$\int_0^1 f(x) - \Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)dx = 0,$$

eli $f - \int_0^1 f(x)dx \in Z$. Siis $f = \int_0^1 f(x)dx + (f - \int_0^1 f(x)dx) \in \mathbb{R} + Z$, joten $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus Z$.

Tehtävä 6. Jos $\lambda_e \in I$ kaikilla $e \in E$, niin tietenkin $\lambda_e e \in IL$ kaikilla $e \in E$, jolloin $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e \in M$.

Käänteisen implikaation todistamiseksi huomataan ensin, että $M = \mathrm{sp}(IL) = \mathrm{sp}(IE)$. Nimittäin koska $E \subseteq L$, niin $IE \subseteq IL$ ja $\mathrm{sp}(IE) \subseteq \mathrm{sp}(IL)$. Käänteisen sisältyvyyden todistamiseksi osoitetaan ensin, että $IL \subseteq \mathrm{sp}\, IE$. Olkoon $v \in IL$, jolloin $v = ru$ joillakin $r \in I$ ja $u \in L$. Koska E on L:n kanta, vektori u voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa $u = \sum_{e\in E} \lambda_e e$. Siis

$$v = ru = r \sum_{e\in E} \lambda_e e = \sum_{e\in E} (r\lambda_e) e \in \mathrm{sp}(IE),$$

sillä $r \in I$ ja koska I on ideaali, niin jokaisella $e \in E$ pätee $r\lambda_e \in I$. Koska $IL \subseteq \mathrm{sp}\, IE$, niin $\mathrm{sp}(IL) \subseteq \mathrm{sp}(\mathrm{sp}(IE)) = \mathrm{sp}(IE)$.

Olkoon $x \in M$ ja $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e$ sen yksikäsitteinen esitys kantavektorien avulla. Havainnon $M = \mathrm{sp}(IE)$ nojalla voidaan toisaalta kirjoittaa

$$x = \sum_{r\in I, e\in E} a_{r,e} r e = \sum_{e\in E} \left(\sum_{r\in I} a_{r,e} r \right) e.$$

Vektorin x kantavektoriesityksen yksikäsitteisyyden nojalla jokaisella $e \in E$ pätee siis $\lambda_e = \sum_{r\in I} a_{r,e} r \in I$.