Tampereen yliopisto
Lineaarialgebra 2
Harjoituksen 8 ratkaisuja
Kevät 2024

Tehtävien 1–2 ja 4–6 ratkaisut on muokattu Ville Puuskan tekemistä.

Tehtävä 1. Koska $T \subseteq T + U$, niin $S \cap T \subseteq S \cap (T + U)$. Lisäksi $U \subseteq S$ ja $U \subseteq T + U$, joten $U \subseteq S \cap (T + U)$. Siis myös $(S \cap T) + U \subseteq S \cap (T + U)$, sillä $S \cap (T + U)$ on V:n aliavaruus.

Olkoon sitten $x \in S \cap (T + U)$; erityisesti $x \in T + U$. Kirjoitetaan $x = t + u$, missä $t \in T$ ja $u \in U$. Nyt siis $t + u = x \in S$, joten myös $t = t + u - u \in S$, koska $u \in U \subseteq S$. Siis $t \in S \cap T$, joten $x = t + u \in (S \cap T) + U$. Näin ollen $S \cap (T + U) \subseteq (S \cap T) + U$.

Tehtävä 2. a) Koska kuvaus ei ole nollakuvaus, $\operatorname{Ker} A \neq M$. Modulin M yksinkertaisuudesta seuraa siten $\operatorname{Ker} A = \{\bar{0}\}$, joten A on injektio. Toisaalta koska kuvaus ei ole nollakuvaus, $\operatorname{Im} A \neq \{\bar{0}\}$. Jälleen yksinkertaisuudesta seuraa $\operatorname{Im} A = M$ eli A on surjektio. Siis $A\colon M \cong M$.

b) $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z}$ ei ole yksinkertainen, sillä sillä on alimodulit $n\mathbb{Z}$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $n > 1$, jotka eivät ole triviaaleja mutta ovat aitoja alimoduleita.

c) Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, missä p on alkuluku. Olkoon L sen alimoduli. Abelin ryhmä $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ on paitsi syklinen, niin itse asiassa minkä tahansa epätriviaalin alkionsa virittämä. Tästä seuraa, että $L = \{0\}$ tai $L = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Siis $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on yksinkertainen, mutta sehän ei ole triviaali moduli.

Tehtävä 3. Valitaan W:lle kanta G, jolloin $|G| = \dim(W) = n$. Koska $n = k + l \in \mathbb{N}$, kannan G voi jakaa erilliseksi yhdisteeksi $G = E \cup F$, jossa $|E| = k$ ja $|F| = l$. Asetetaan $U = \operatorname{sp}(E)$ ja $V = \operatorname{sp}(F)$. Koska G on W:n kantana vapaa, sen osajoukot E ja F ovat myös vapaita. Siis $\dim(U) = |E| = k$ ja $\dim(V) = l$.

Varmistetaan vielä, että $W = U \oplus V$. Koska $U + V \supseteq U \cup V \supseteq E \cup F = G$, niin $U + V \supseteq \operatorname{sp}(G) = W$ ja siten $U + V = W$. Jos $x \in U \cap V$, niin toisaalta x on lineaarikombinaatio E:n vektoreista, toisaalta F:n vektoreista. Koska vektorin x esitys G:n vektoreiden lineaarikombinaationa on yksikäsitteinen, täytyy olla voimassa $x = \bar{0}$. Siis $U \cap V = \{\bar{0}\}$ eli suoruusehto pätee. Siten $U \oplus V = W$.

Tehtävä 4. Huomataan ensin, että $(5,0) = 2(2,1) - (-1,2) \in M$. Toisaalta jokaisella $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pätee

$$(x,y) \sim (x,y) - y(2,1) = (x-2y,0),$$

missä $\sim$ on alimodulia M vastaava kongruenssi. Jakoyhtälön mukaan $x - 2y = 5k + l$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$ ja $l \in \{0,1,2,3,4\}$, joten saadaan edelleen

$$(x,y) \sim (x-2y,0) \sim (x-2y,0) - k(5,0) = (l,0),$$

sillä $(5,0) \in M$. Siis

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/M = \{(0,0)+M, (1,0)+M, (2,0)+M, (3,0)+M, (4,0)+M\}.$$

Vektorisumman yhteenlaskutauluksi saadaan

+	(0,0)+M	(1,0)+M	(2,0)+M	(3,0)+M	(4,0)+M
(0,0)+M	(0,0)+M	(1,0)+M	(2,0)+M	(3,0)+M	(4,0)+M
(1,0)+M	(1,0)+M	(2,0)+M	(3,0)+M	(4,0)+M	(0,0)+M
(2,0)+M	(2,0)+M	(3,0)+M	(4,0)+M	(0,0)+M	(1,0)+M
(3,0)+M	(3,0)+M	(4,0)+M	(0,0)+M	(1,0)+M	(2,0)+M
(4,0)+M	(4,0)+M	(0,0)+M	(1,0)+M	(2,0)+M	(3,0)+M

Tehtävä 5. a) U on k-ulotteisena aliavaruutena tietenkin k-ulotteinen avaruus, joten U:ssa on p^k alkiota.

b) Dimensiolauseen nojalla $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim()n - k$. Siis V/U:ssa on p^{n-k} alkiota.

Todistetaan vielä tulokset käyttämättä dimensiolausetta. Joukko-opillisesti $V/U = \{x + U \mid x \in V\}$ on joukon V tietty ositus keskenään yhtämahtaviin sivuluokkiin. Jokaisella $x \in V$ sivuluokassa $x + U$ on siis p^k alkiota, ja osituksessa V/U on yllätyksettömästi

$$|V/U| = |V|/|U| = p^n/p^k = p^{n-k}$$

sivuluokkaa. Koska V/U on myös $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruus, niin tästä seuraa, että $\dim(V/U) = \log_p(p^{n-k}) = n - k$.

Tehtävä 6. a) Selvästi $U \cong U \times \{\bar{0}_U\}$ ja $V \cong \{\bar{0}_V\} \times V$ (avaruuksien välillä ovat luonnolliset isomorfismit $u \mapsto (u, \bar{0}_V)$ ja $v \mapsto (\bar{0}_U, v)$). Lisäksi $U \times V = (U \times \{\bar{0}_V\}) \oplus (\{\bar{0}_U\} \times V)$, sillä jokainen $(u,v) \in U \times V$ voidaan esittää muodossa

$$(u,v) = (u, \bar{0}_V) + (\bar{0}_U, v) \in (U \times \{\bar{0}_V\}) + (\{\bar{0}_U\} \times V)$$

ja

$$(U \times \{\bar{0}_V\}) \cap (\{\bar{0}_U\} \times V) = \{(\bar{0}_U, \bar{0}_V)\} = \bar{0}_{U \times V}.$$

Siis

$$
\begin{aligned}
\dim(U \times V) &= \dim((U \times \{\bar{0}_V\}) \oplus (\{\bar{0}_U\} \times V)) \\
&= \dim(U \times \{\bar{0}_V\}) + \dim(\{\bar{0}_U\} \times V = \dim U + \dim V.
\end{aligned}
$$

b) Olkoot $E \subseteq U$ ja $F \subseteq V$ kannat. Jokainen $U \times V$:n alkio voidaan kirjoittaa joukon $(E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times F)$ alkioiden lineaarikombinaationa, sillä jos $(x, y) \in U \times V$, niin

$$
(x, y) = \Big(\sum_{e \in E} a_e e, \sum_{f \in F} b_f f \Big) = \sum_{e \in E} a_i(e, 0) + \sum_{f \in F} b_j(0, f)
$$

joillakin $a_e, b_f \in K$ $(e \in E,\ f \in F)$. Siis $(E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times E')$ virittää avaruuden $U \times V$. Lisäksi joukko on vapaa, sillä

$$
\sum_{e \in E} a_e(e, 0) + \sum_{f \in F} b_j(0, f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{e \in E} a_e e = 0 \\ \sum_{f \in F} b_f f = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall e \in E(a_e = 0) \wedge \forall f \in F(b_f = 0).
$$

Siis $G = (E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times F)$ on kanta, mistä seuraa

$$
\dim(U \times V) = |G| = |E| + |F| = \dim(U) + \dim(V).
$$