III Konstruktiot

Mistä tahansa tarkasteltavista moduleista voidaan erilaisten konstruktioiden kautta rakentaa uusia moduleita. Tässä osassa käydään läpi yleisimpiä tällaisista konstruktiosta: Summan ja tulon avulla annetuista moduleista rakennetaan uusi, rakennuspalikoitaan isompi moduli, mutta muilla konstruktioilla voidaan päätyä myös lähtökohtaansa pienempää olioon. Tekijämodulin rakentaminen on tällainen konstruktio, ja aiemmin käsiteltyä alimoduliakin voi pitää tämäntyyppisenä asiana. Luvun lopuksi käsitellään operaattoriavaruuksia, minkä yhteydessä pienemmmistä rakennuspalikoista jälleen rakennetaan suurempia kokonaisuuksia.

1. Summa ja tulo

1.1. Määritelmä. Olkoon M moduli ja $\mathcal{A}$ perhe modulin M osajoukkoja. Tällöin *summa* $\sum_{A\in\mathcal{A}} A$ koostuu vektoreista $\sum_{A\in\mathcal{A}} x_A$, missä jokaisella $A \in \mathcal{A}$ pätee $x_A \in A$ ja vektoreiden summa on äärellisluonteinen. Lyhyesti siis:

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} A = \left\{ \sum_{A\in\mathcal{A}} x_A \;\middle|\; \operatorname{supt}((x_A)_{A\in\mathcal{A}}) \text{ äärellinen }, \forall A \in \mathcal{A}\,(x_A \in A) \right\}.$$

Vastaavasti indeksöidylle perheelle $(A_i)_{i\in I}$ voidaan määritellä *summa*

$$\sum_{i\in I} A_i = \left\{ \sum_{i\in I} x_A \;\middle|\; \operatorname{supt}((x_i)_{A\in\mathcal{A}}) \text{ äärellinen }, \forall i \in I(x_i \in \mathcal{A}_i) \right\}.$$

Erikoistapaus tästä on äärellinen jono $(A_0, \dots, A_{n-1})$, jolle merkitään

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i = A_0 + \cdots + A_{n-1}.$$

1.2. Lause. *Olkoon M moduli ja $\mathcal{L}$ perhe sen alimoduleja. Tällöin $\sum_{L\in\mathcal{L}} L$ on myös M:n alimoduli.*

Todistus. Tarkastetaan, että alimodulikriteerit pätevät summalle $S = \sum_{L\in\mathcal{L}} L$. Olkoot $x, y \in S$, jolloin vektorit x ja y voidaan esittää äärellisluonteisina summina $x = \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L$ ja $y = \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L$. Olkoon myös $c \in R$ skalaari.

$\boxed{0}$ Koska jokainen $\mathcal{L}$ alkio on alimoduli, niin jokaisella $L \in \mathcal{L}$ pätee $\bar{0} \in L$. Siis $\bar{0} = \sum_{L\in\mathcal{L}} \bar{0} \in S$.

$\boxed{1}$ Käyttämällä vektorisumman vaihdannaisuutta saadaan ryhmiteltyä

$$x + y = \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L + \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L = \sum_{L\in\mathcal{L}} (x_L + y_L) \in S,$$

sillä jokaisella $L \in \mathcal{L}$ pätee $x_L + y_L \in L$.

$\boxed{2}$ Jokaisella $L \in \mathcal{L}$ pätee $cx_L \in L$, joten

$$cx = c\sum_{L\in\mathcal{L}} x_L = \sum_{L\in\mathcal{L}} cx_L \in S.$$

Siis alimodulikriteeri on voimassa ja S on M:n alimoduli. $\square$

1.3. Määritelmä. Olkoon M moduli ja $\mathcal{A}$ perhe sen alimoduleja. Summa $\sum_{A\in\mathcal{A}} A$ on *suora*, jos jokaisella $x \in \sum_{A\in\mathcal{A}} A$ on yksikäsitteinen esitys $x = \sum_{A\in\mathcal{A}} x_A$, missä summa on äärellisluonteinen ja jokaisella $A \in \mathcal{A}$ pätee $x_A \in A$. Tällöin merkitään

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} A = \bigoplus_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Vastaavasti merkitään $A_0 + \cdots + A_{n-1} = A_0 \oplus \cdots \oplus A_{n-1}$, mikäli ao. summa on suora.

1.4. Lause. *(Suoruuskriteeri) Modulin M alimoduliperheen $\mathcal{L}$ summa $\sum_{L\in\mathcal{L}} L$ on suora täsmälleen silloin, kun jokaisella $L_0 \in \mathcal{L}$ pätee*

$$\left(\sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} L\right) \cap L_0 = \{\bar{0}\}.$$

Erityisesti jos L_1 ja L_2 ovat alimoduleita, niin $L_1 + L_2$, jos ja vain jos $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$.

Todistus. Oletetaan ensin, että summa $\sum_{L\in\mathcal{L}} L$ ei ole suora. Tällöin on olemassa vektori v, jonka voi esittää summana kahdella tavalla, ts. on olemassa eri äärellisluonteiset jonot $(x_L)_{L\in\mathcal{L}}$ ja $(y_L)_{L\in\mathcal{L}}$, joille $v = \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L = \sum_{L\in\mathcal{L}} y_L$ ja jokaisella $L \in \mathcal{L}$ pätee $x_L, y_L \in L$. Koska jonot ovat eri jonoja, niin jollain $L_0 \in \mathcal{L}$ pätee $x_{L_0} \neq y_{L_0}$ eli $y_{L_0} - x_{L_0} \neq \bar{0}$. Toisaalta

$$\bar{0} = v - v = \sum_{L\in\mathcal{L}} x_L - \sum_{L\in\mathcal{L}} y_L = \sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} (x_L - y_L) + x_{L_0} - y_{L_0},$$

joten

$$y_{L_0} - x_{L_0} = \sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} (x_L - y_L) \in \left(\sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} L\right) \cap L_0.$$

Siis

$$\left(\sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} L\right) \cap L_0 \neq \{\bar{0}\}.$$

Oletetaan sitten, että

$$\left(\sum_{L\in\mathcal{L}\smallsetminus\{L_0\}} L\right) \cap L_0 \neq \{\bar{0}\}.$$

Vasemmanpuoleinen leikkaus on alimoduli, joten se ei voi olla tyhjä joukko. Valitaan $x_{L_0} \in \left(\left(\sum_{L\in\mathcal{L}\setminus\{L_0\}} L\right) \cap L_0\right) \setminus \{\bar{0}\}$, jolloin erityisesti $x_{L_0} \in L_0 \setminus \{\bar{0}\}$. Toisaalta $x_{L_0} \in \sum_{L\in\mathcal{L}\setminus\{L_0\}} L$, joten voidaan valita äärellisluonteinen jono $(y_L)_{L\in\mathcal{L}\setminus\{L_0\}}$, jolle $x_{L_0} = \sum_{L\in\mathcal{L}\setminus\{L_0\}} y_L$ ja jokaisella $L \in \mathcal{L} \setminus \{L_0\}$ pätee $y_L \in L$. Merkitään $x_L = \bar{0}$, kun $L \in \mathcal{L} \setminus \{L_0\}$, ja $y_{L_0} = \bar{0}$. Tällöin jokaisella $L \in \mathcal{L}$ pätee $x_L, y_L \in L$ ja

$$\sum_{L\in\mathcal{L}} x_L = \sum_{L\in\mathcal{L}} y_L,$$

joten summa $\sum_{L\in\mathcal{L}}$ ei ole suora. $\square$

1.5. Lause. *Olkoon W vektoriavaruus sekä U ja V sen aliavaruuksia, joille $U \oplus V = W$. Tällöin* $\dim(W) = \dim(U) + \dim(V)$.

Todistus. Kantalauseen (osa I, lause 4.13) mukaan U:lle voidaan valita U:lle kanta E ja V:lle vastaavasti kanta F. Väitetään, että $E \cup F$ on W:n kanta. (Huomattakoon, että $E \cap F = \emptyset$, sillä summan $U \oplus V$ suoruudesta seuraa $U \cap V = \{\bar{0}\}$ ja $\emptyset$ ei voi olla yhdessäkään kannassa alkiona.) Ensinnäkin $E \cup F$ virittää W:n, sillä $U = \mathrm{sp}(E) \subseteq \mathrm{sp}(E \cup F)$ ja $V = \mathrm{sp}(F) \subseteq \mathrm{sp}(E \cup F)$, joten $U \cup F \subseteq \mathrm{sp}(E \cup F)$, mistä laskuharjoituksessa todistetun perusteella seuraa

$$W = U + V = \mathrm{sp}(U \cup V) \subseteq \mathrm{sp}(\mathrm{sp}(E \cup F)) = \mathrm{sp}(E \cup F).$$

Siis $E \cup F$ virittää W:n.

Todistetaan sitten, että $E \cup F$ on myös vapaa. Tehdään vapaustesti joukolle $E \cup F$ ja oletetaan, että äärellisluonteinen kerroinjono $(\lambda_s)_{s\in E\cup F}$ on sellainen, että $\sum_{s\in E\cup F} \lambda_s s = \bar{0}$. Merkitään

$$u = \sum_{s\in E} \lambda_s s \text{ ja } v = \sum_{s\in F} \lambda_s s,$$

jolloin siis $u + v = \emptyset$, $u \in U$ ja $v \in V$. Koska summa $U \oplus V$ on suora, niin $U \cup V = \{\bar{0}\}$, mutta $u = -v \in U \cup V$, joten $u = -v = \bar{0}$. Toisin sanoen

$$\sum_{s\in E} \lambda_s s = \bar{0} \text{ ja } \sum_{s\in F} \lambda_s s = \bar{0},$$

mistä joukkojen E ja F vapauden nojalla seuraa toisaalta, että kaikilla $s \in E$ pätee $\lambda_s = 0$, toisaalta, että kaikilla $s \in F$ pätee $\lambda_s = 0$. Siis kerroinjono $(\lambda_s)_{s\in E\cup F}$ on nollajono, mikä osoittaa, että $E \cup F$ on vapaa.

Koska $E \cup F$ on vapaana virittäjistönä avaruuden W kanta, pätee

$$\dim(W) = |E \cup F| = |E| + |F| = \dim(U) + \dim(V). \quad \square$$

1.6. Määritelmä. Olkoon M moduli ja L sen alimoduli. M:n alimodulia L' kutsutaan L:n *(algebralliseksi) komplementiksi M:ssä*, jos $M = L \oplus L'$.

1.7. Lause. *Vektoriavaruuden V jokaisella aliavaruudella U on komplementti.*

Todistus. Kantalauseen nojalla U:lle voidaan valita kanta E_0. Koska E_0 on vapaa ja V virittää itsensä, niin V:llä on kantalauseen nojalla kanta E, jolle $E_0 \subseteq E \subseteq V$. Merkitään $Z = \mathrm{sp}(E \setminus E_0)$. Tällöin $U + Z = \mathrm{sp}(U \cup Z) \subseteq \mathrm{sp}(E_0 \cup (E \setminus E_0)) = \mathrm{sp}(E) = V$, joten $U + V = Z$. Tarkistetaan vielä, että lauseen 1.4 suoruuskriteeri on voimassa. Koska E on kanta, niin $U \cap Z = \mathrm{sp}(E_0) \cap \mathrm{sp}(E \setminus E_0) = \{vo\}$, muutenhan olisi olemassa epätriviaali vektori x, jonka voisi kirjoittaa toisaalta E_0:n, toisaalta $E \setminus E_0$:n vektorien lineaarikombinaationa, ja siten kahdella eri tavalla E:n vektorien lineaarikombinaationa. Siis $U \oplus Z = V$ ja Z on U:n komplementti. □

1.8. Lemma. *Olkoot U ja V vektoriavaruuden W aliavaruuksia. Olkoon U_1 aliavaruuden $U \cap V$ komplementti U:ssa ja V_1 aliavaruuden $U \cap V$ komplementti V:ssä. Tällöin*

$$U + V = U_1 \oplus (U \cap V) \oplus V_1.$$

Todistus. Koska $U_1 \oplus (U \cap V) = U$, niin

$$U_1 + (U \cap V) + V_1 = (U_1 + (U \cap V)) + V_1 = U + V_1 \subseteq U + V.$$

Toisaalta yo. kaavan yhtälöosasta seuraa myös $U \subseteq U + V_1 = U_1 + (U \cap V) + V_1$, ja symmetrisesti saadaan johdettua $V \subseteq U_1 + V = U_1 + (U \cap V) + V_1$. Siis $U \cup V \subseteq U_1 + (U \cap V) + V_1$, mistä seuraa laskuharjoituksissa todistetun tuloksen avulla

$$U + V = \mathrm{sp}(U \cup V) \subseteq U_1 + (U \cap V) + V_1.$$

Kun saadut sisältyvyydet yhdistetään, saadaan $U + V = U_1 + (U \cap V) + V_1$.

On vielä todistettava, että yo. summa on suora; suoruuskriteeri 1.4 jakautuu kolmeksi ehdoksi. Ensimmäiseksi todetaan, että

$$U_1 \cap (U \cap V) \oplus V_1 = U_1 \cap V = (U_1 \cap U) \cap V = U_1 \cap (U \cap V) = \{\bar{0}\},$$

sillä U_1 on $U \cap V$:n komplementti U:ssa. Aivan vastaavalla tavalla saadaan $V_1 \cap ((U_1 \oplus (U \cap V)) = \{\bar{0}\}$. Viimeiseksi on osoitettava, että $(U \cap V) \cap (U_1 + V_1) = \{\emptyset\}$. Olkoon siis $x \in (U \cap V) \cap (U_1 + V_1)$. Koska $x \in U_1 + V_1$, niin $x = u_1 + v_1$ joillakin $u_1 \in U_1$ ja $v_1 \in V_1$. Toisaalta $x \in U \cap V \subseteq U$, joten myös $v_1 = x - u_1 \in U$, sillä $u_1 \in U_1 \subseteq U$. Siis $v_1 \in U \cap V_1 \subseteq U \cap V$ ja $v_1 \in V_1$, mutta $V_1 \cap (U \cap V) = \{\bar{0}\}$ suoruuskriteerin mukaan, ts. $v_1 = \bar{0}$. Samaten $u_1 = \bar{0}$, joten $x = u_1 + v_1 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Siis summa $U_1 \cap (U \cap V) \oplus V_1$ on suora. □

1.9. Lause. *Olkoot U ja V vektoriavaruuden W äärellisulotteisia aliavaruuksia. Tällöin*

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Todistus. Edellisen lauseen nojalla voidaan valita $U \cap V$:lle komplementit U_1 U:ssa ja V_1 V:ssä. Tällöin paitsi että $U = U_1 \oplus (U \cap V)$ ja $V = V_1 \oplus (U \cap V)$, niin edellisen lemman mukaan myös $U + V = U_1 \oplus (U \cap V) \oplus V_1$. Lausetta 1.5 toistuvasti käyttäen saadaan ensin

$$\dim(U) = \dim(U_1) + \dim(U \cap V) \text{ ja } \dim(V) = \dim(V_1) + \dim(U \cap V).$$

Koska U ja V ovat äärellisulotteisia, dimensiot kaavoissa ovat luonnollisia lukuja, joten

$$\dim(U_1) = \dim(U) - \dim(U \cap V) \text{ ja } \dim(V_1) = \dim(V - \dim(U \cap V).$$

Kolmas lauseen 1.5 sovellus tuottaa lopuksi kaavan

$$\begin{aligned}\dim(U+V) &= \dim(U_1) + \dim(U \cap V) + \dim(V_1)\\ &= \dim(U) - \dim(U \cap V) + \dim(U \cap V) + \dim(V) - \dim(U \cap V)\\ &= \dim(U) + \dim(V - \dim(U \cap V). \quad \square\end{aligned}$$

1.10. Määritelmä. Olkoot M_i, $i \in I$, R-moduleja. Näiden *karteesinen tulo* on perusjoukkojen karteesinen tulo

$$\prod_{i \in I} M_i = \{\, x \colon I \to \bigcup_{i \in I} M_i \mid \forall i \in I(x(i) \in M_i) \,\}$$

varustettuna pisteittäisellä summalla ja skalaarikerronnalla, ts. $x + y \colon I \to \bigcup_{i \in I} M_i$,

$$(x+y)(i) = x(i) + y(i)$$

ja $cx \colon I \to \bigcup_{i \in I} M_i$,

$$(cx)(i) = cx(i),$$

kun $x, y \in \prod_{i \in I} M_i$, $c \in R$. Näin muodostuva rakenne on R-moduli. Erikoistapauksena tästä on R-moduli $M_0 \times \cdots \times M_{n-1}$, kun $M_0, \ldots, M_{n-1}$ ovat R-moduleita.

1.11. Lause. *Olkoot M_i, $i \in I$, R-moduleita. Kun $j \in I$, olkoon $p_j \colon M_j \to \prod_{i \in I} M_i$ kanoninen upotus, ts.*

$$p_j(v)(i) = \begin{cases} v, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{muuten} \end{cases},$$

kun $v \in M_j$ ja $i \in I$. Tällöin:

a) Summa $\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(p_i) = \sum_{i \in I} p_i[M_i]$ on suora.

b) $\bigoplus_{i \in I} \operatorname{Im}(p_i) = \{\, x \in \prod_{i \in I} M_i \mid \operatorname{supt}(x) \text{on äärellinen} \,\}$. Erityisesti jos I on äärellinen, niin $\bigoplus_{i \in I} \operatorname{Im}(p_i) = \prod_{i \in I} M_i$.

Todistus. a) Tarkastellaan vektorien $y \in \prod_{i \in I} M_i$ kantajia

$$\operatorname{supt}(y) = \{\, i \in I \mid y(i) \neq \bar{0} \,\}.$$

Olkoon $j \in I$. Suoraan upotuksen p_j määritelmän mukaan jokaisella $x \in M_j$ pätee $\operatorname{supt}(p_j(x)) \subseteq \{j\}$. Huomataan siis, että jokaisella $y \in \sum_{i \in I \smallsetminus \{j\}} \operatorname{Im}(p_i)$ pätee $\operatorname{supt}(y) \subseteq I \smallsetminus \{j\}$, kun taas jokaisella $y \in \operatorname{Im}(p_j)$ pätee $\operatorname{supt}(y) \subseteq \{j\}$. Siis kaikilla $y \in \left(\sum_{i \in I \smallsetminus \{j\}} \operatorname{Im}(p_i)\right) \cap \operatorname{Im}(p_j)$ on voimassa $\operatorname{supt}(v) = \emptyset$ eli $v = \bar{0}$. Siten

$$\left(\sum_{i \in I \smallsetminus \{j\}} \operatorname{Im}(p_i)\right) \cap \operatorname{Im}(p_j) = \{\bar{0}\},$$

ts. summa $\sum_{i\in I}\operatorname{Im}(p_i)$ toteuttaa suoruusehdon.

b) Olkoon $y\in\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Im}(p_i)$. Tällöin $y=\sum_{i\in I}y_i$, missä summa on äärellisluonteinen ja jokaisella $i\in I$ pätee $y_i \operatorname{Im}(p_i)$. Summan äärellisluonteisuuden nojalla $J=\operatorname{supt}((y_i)_{i\in I})=\{\,i\in I\mid y_i\neq\bar{0}\,\}$ on äärellinen. Kaikilla $i\in J$ pätee $\operatorname{supt}(y_i)=\{i\}$ ja kaikilla $i\in I\setminus J$ taas $\operatorname{supt}(y_i)=\emptyset$, joten

$$\operatorname{supt}(y)=\operatorname{supt}(\sum_{i\in I}y_i)=J.$$

Siis $\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Im}(p_i)\subseteq L$, missä on merkitty $L=\{\,x\in\prod_{i\in I}M_i\mid \operatorname{supt}(x)\text{on äärellinen}\,\}$.

Olkoon kääntäen $y=(y_i)_{i\in I}\in L$. Tällöin $J=\operatorname{supt}(y)$ on äärellinen ja $y=\sum_{i\in I}p_i(y_i)$, missä summan kantaja on samaten J ja jokaisella $i\in I$ pätee $p_i(y_i)\in\operatorname{Im}(p_i)$. Siis $y\in\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Im}(p_i)$. Tästä seuraa $L\subseteq\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Im}(p_i)$. $\square$

1.12. Lause. *Olkoon $A\colon U\to V$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus. Olkoon Z $\operatorname{Ker}(A)$:n komplementti U:ssa. Tällöin $A{\restriction}Z\colon Z\cong\operatorname{Im}(A)$.*

Todistus. Rajoittuman $A{\restriction}Z$ ydin on

$$\operatorname{Ker}(A{\restriction}Z)=\{\,x\in Z\mid (A{\restriction}Z)(x)=\bar{0}\,\}=\{\,x\in U\mid A(x)=\bar{0}\,\}\cap Z=\operatorname{Ker}(A)\cap Z=\{\bar{0}\},$$

sillä Z on $\operatorname{Ker}(A)$:n komplementti. Siis $A{\restriction}Z$ on injektio.

Selvästi $\operatorname{Im}(A{\restriction}Z)\subseteq\operatorname{Im}(A)$. Olkoon toisaalta $y\in\operatorname{Im}(A)$. Valitaan $u\in U$, jolle $A(u)=y$. Koska $U=Z\oplus\operatorname{Ker}(A)$, niin joillakin $z\in Z$ ja $x\in\operatorname{Ker}(A)$ on voimassa $u=z+x$. Siten $y=A(u)=A(z+x)=A(z)+A(x)=A(z)+\bar{0}=A(z)$, sillä $x\in\operatorname{Ker}(A)$. Siis $y\in A[Z]=\operatorname{Im}(A{\restriction}Z)$, joten $A{\restriction}Z$ on kuvauksena $Z\to\operatorname{Im}(A)$ surjektio. Siis $A{\restriction}Z$ on bijektio $Z\to\operatorname{Im}(A)$, ja lineaarikuvauksen rajoittumana se on myös lineaarikuvaus, joten $A{\restriction}Z\colon Z\cong\operatorname{Im}(A)$. $\square$

1.13. Seuraus. *Kun $A\colon U\to V$ on vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus, niin*

$$\dim(U)=\dim(\operatorname{Ker}(A))+\operatorname{rg}(A).$$

Todistus. Valitaan lineaarikuvauksen A ytimelle $\operatorname{Ker}(A)$ komplementti Z, jolloin $U=\operatorname{Ker}(A)\oplus Z$. Koska edellisen lauseen mukaan $Z\cong\operatorname{Im}(A)$, niin lauseen 1.5 avulla saadaan dimensiot laskettua:

$$\begin{aligned}\dim(U)&=\dim(\operatorname{Ker}(A))+\dim(Z)\\&=\dim(\operatorname{Ker}(A))+\dim(\operatorname{Im}(A))=\dim(\operatorname{Ker}(A))+\operatorname{rg}(A).\quad\square\end{aligned}$$

2. Tekijäavaruudet

2.1. Määritelmä. Olkoon M R-moduli. Ekvivalenssirelaatio $\sim$ on modulin M *kongruenssi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1) Jos $x \sim x'$ ja $y \sim y'$, niin $x + y \sim x' + y'$.
2) Jos $x \sim x'$ ja $c \in R$, niin $cx \sim cx'$.

2.2. Lause. *Olkoon M R-moduli. Tällöin M:n kongruenssit ja aliavaruudet ovat yksi–yhteen-vastaavuudessa seuraavalla tavalla:*

1) Kun $\sim$ on modulin M kongruenssi, niin nollavektorin ekvivalenssiluokka $L = [\bar{0}]_\sim$ on M:n alimoduli ja kaikilla $x, y \in M$ pätee

$$x \sim y \iff x - y \in L.$$

2) Kun L on M:n alimoduli, niin kaikille $x, y \in M$ pätevän ehdon

$$x \sim y \iff x - y \in L$$

määräämä M:n relaatio $\sim$ on kongruenssi ja $L = [\bar{0}]_\sim$.

Todistus. 1) Oletetaan, että $\sim$ on kongruenssi ja tarkastetaan, että $L = [\bar{0}]_\sim$ toteuttaa alimodulikriteerit.

$\boxed{0}$ Selvästi $\bar{0} \in [\bar{0}]_\sim = L$.

$\boxed{1}$ Olkoot $x, y \in L = [\bar{0}]_\sim$ eli $x \sim \bar{0}$ ja $y \sim \bar{0}$. Koska $\sim$ on kongruenssi, niin tästä seuraa $x + y \sim \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, joten $x + y \in L$.

$\boxed{2}$ Olkoon $x \in L$ ja $x \in R$. Tällöin $x \sim \bar{0}$, joten kongruenssin määritelmästä seuraa $cx \sim c \cdot \bar{0} = \bar{0}$ ja siis $cx \in L$.
Siis L on M:n alimoduli. Kaikilla $x, y \in M$ pätee

$$x \sim y \Rightarrow x \sim y, (-y) \sim (-y) \Rightarrow x + y = x + (y) \sim y + (-y) = \bar{0} \Rightarrow x - y \in L$$

ja kääntäen

$$x - y \in L \Rightarrow x - y \sim \bar{0}, y \sim y \Rightarrow x = (x - y) + y \sim \bar{0} + y = y,$$

joten lisäväitekin pitää paikkansa.

2) Oletetaan kääntäen, että L on alimoduli ja M:n relaatio $\sim$ määritellään ehdon $x \sim y \iff x - y \in L$ kautta, kun $x, y \in M$. Tarkastetaan ensin, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Olkoot $x, y, z \in M$.

Refleksiivisyys: Koska L on alimoduli, niin $x - x = \bar{0} \in L$, joten $x \sim x$.

Symmetrisyys: Jos $x \sim y$ eli $x - y \in L$, niin $y - x = (-1)(x - y) \in L$, sillä L on alimoduli, joten $y \sim x$.

Transitiivisuus: Oletetaan, että $x \sim y$ ja $y \sim z$ eli $x - y, y - z \in L$. Koska L on M:n alimoduli, tästä seuraa, että $x - z = (x - y) + (y - z) \in L$, joten $x \sim z$.

Ekvivalenssirelaatio $\sim$ on kongruenssi, sillä kaikilla $x, x', y, y' \in M$ ja $c \in R$ pätee:

$\boxed{1}$ Jos $x \sim x'$ ja $y \sim y'$ eli $x - x', y - y' \in L$, niin

$$(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') \in L,$$

joten $x + x \sim y + y'$.

$\boxed{2}$ Jos $x \sim x'$, niin $x - x' \in L$, joten $cx - cx' = c(x - x') \in L$, mistä saadaan $cx \sim cx'$.
Lopuksi tarkastetaan vielä, että

$$[\bar{0}]_\sim = \{\, x \in M \mid x \sim \bar{0} \,\} = \{\, x \in M \mid x = x - \bar{0} \in L \,\} = L.$$

□

2.3. Määritelmä. Olkoon M R-moduli ja $\sim$ sen kongruenssi. Varustetaan kongruenssia $\sim$ vastaava ositus $M/\sim = \{\, [x]_\sim \mid x \in M \,\}$ yhteenlaskulla, joille

$$[x]_\sim + [y]_\sim = [x+y]_\sim$$

ja skalaarikerronnalla

$$c[x]_\sim = [cx]_\sim,$$

kun $x, y \in M$ ja $c \in R$. Koska $\sim$ on kongruenssi, yhteenlasku on $M/\sim$:n hyvinmääritelty laskutoimitus ja skalaarikerronta hyvinmääritelty kuvaus $R \times (M/\sim) \to M/sim$. Näin muodostuvaa R-modulia kutsutaan *tekijämoduliksi* ja merkitään yleensä $M/L = M/\sim$, missä $L = [\bar{0}]_\sim$.

Tekijämoduli on tietenkin erityisempi asia kuin tekijäryhmä, joten tässäkin tapauksessa alkion $x \in M$ ekvivalenssiluokka on sivuluokka eli

$$[x]_\sim = x + L = \{x\} + L = \{\, x + v \mid v \in L \,\}.$$

2.4. Lause. *Olkoon W vektoriavaruus, U sen aliavaruus ja V U:n komplementti W:ssä. Tällöin $V \cong W/U$, missä isomorfismiksi $p{\restriction}V$ eli kanonisen projektion $p\colon W \to W/U$, $p(x) = x + U$, rajoittuma V:hen. Lisäksi V on U:ta vastaavan kongruenssi edustajisto, ts. jokaisella $x \in W$ $(x + L) \cap V$ on yksiö.*

Todistus. Kanoninen projektio p on selvästi lineaarikuvaus, $\operatorname{Ker}(p) = \{\, x \in W \mid p(x) = \bar{0}_{W/U} \,\} = \{\, x \in W \mid x + U = \bar{0} + U \,\} = U$ ja $\operatorname{Im}(p) = W/U$, joten lausetta 1.12 soveltamalla saadaan, että $p{\restriction}V \colon V \cong W/U$.

Koska $p{\restriction}V$ on surjektio $V \to W/U$, niin jokaista $x \in W$ vastaa $v \in V$, jolle $p(x) = p(v)$ eli $x + U = v + U$. Jos myös alkiolle $v' \in V$ pätee $p(x) = x + U = v' + U = p(v')$, niin kuvauksen $p{\restriction}V$ injektiivisyydestä seuraa $v = v'$. Siis $(x + L) \cap U = \{v\}$ on yksiö. □

2.5. Seuraus. *(Homomorfialause vektoriavaruuksille) Olkoon $A\colon V \to W$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen isomorfismi $\widetilde{A}\colon A/\operatorname{Ker}(A) \cong W$, että $A = \widetilde{A} \circ p$, missä p on kanoninen kuvaus $A \to A/\operatorname{Ker}(A)$, ts. $p(x) = x + \operatorname{Ker}(A)$, kun $x \in V$.*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "A"'] \arrow[dr, "p"'] & & W \\
& V/\operatorname{Ker}(A) \arrow[ur, dashed, "\widetilde{A}"] &
\end{tikzcd}$$

Todistus. Valitaan $\operatorname{Ker}(A)$:lle komplementti C. Edellisen lauseen mukaan $p{\restriction}C\colon C \cong V/\operatorname{Ker}(A)$. Kuvaus $\widetilde{A} = A \circ (p{\restriction}C)^{-1}$ on hyvinmääritelty lineaarikuvaus $V/\operatorname{Ker}(A) \to W$. Tarkistetaan, että $A = \widetilde{A} \circ p$. Olkoon $x \in V$. Koska $V = C \oplus \operatorname{Ker}(A)$, niin vektorin x voi esittää summana $x = x' + u$, missä $x' \in C$ ja $u \in \operatorname{Ker}(A)$. Huomataan, että $A(x) = A(x' + u) = A(x') + A(u) = A(x') + \bar{0} = A(x')$ ja tietenkin myös $p(x) = x + \operatorname{Ker}(A) = x' + u + \operatorname{Ker}(A) = x' + \operatorname{Ker}(A)$, joten

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A} \circ p)(x) = \widetilde{A}(p(x)) &= (A \circ (p{\restriction}C)^{-1})(p(x')) \\
&= (A \circ (p{\restriction}C)^{-1} \circ (p{\restriction}C))(p(x')) = A(x') = A(x).
\end{aligned}$$

Siis $A = \widetilde{A} \circ p$. Tästä seuraa $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(\widetilde{A})$, mutta määritelmästä $\widetilde{A} = A \circ (p\restriction C)^{-1}$ seuraa tietenkin kääntäen $\mathrm{Im}(\widetilde{A}) \subseteq \mathrm{Im}(A)$. Siis $\widetilde{A}$ on surjektio $V/\operatorname{Ker}(A) \to \mathrm{Im}(A)$. Koska $\operatorname{Ker}(A\restriction C) = \operatorname{Ker}(A) \cap C = \{\bar{0}\}$ suoruuskriteerin mukaan, niin $A\restriction C$ on injektio, joten $\widetilde{A} = (A\restriction C) \circ (p\restriction C)^{-1}$ on myös injektio. Siis $\widetilde{A}$ on lineaarinen isomorfismi $V/\operatorname{Ker}(A) \to \mathrm{Im}(A)$.
□

Homomorfialauseen voi yleistää moduleille, mutta todistuksessa ei voi enää käyttää yleisessä tapauksessa komplementteja.

2.6. Homomorfialause moduleille. *Olkoon $A\colon M \to N$ modulien välinen lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa sellainen lineaarikuvaus $\tilde{A}\colon A/\operatorname{Ker}(A) \to N$, että $A = \widetilde{A} \circ p$, missä p on kanoninen kuvaus $A \to A/\operatorname{Ker}(A)$, ts. $p(x) = x + \operatorname{Ker}(A)$, kun $x \in M$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "p"'] & & N \\ & M/\operatorname{Ker}(A) \arrow[ur, dashed, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Todistus. Tarkastellaan kuvausta $\widetilde{A}\colon M/\operatorname{Ker}(A) \to N$,

$$\widetilde{A}(x + \operatorname{Ker}(A)) = A(x).$$

On tietenkin tarkastettava, onko tällainen kuvaus hyvinmääritelty. Olkoot siis $x, x' \in M$ vektoreita, joille $x + \operatorname{Ker}(A) = x' + \operatorname{Ker}(A)$. Tällöin $x \in x + \operatorname{Ker}(A) = x' + Ker(A)$, joten on olemassa $u \in \operatorname{Ker}(A)$, jolle pätee $x = x' + u$. Saadaan

$$A(x) = A(x' + u) = A(x') + A(u) = A(x') + \bar{0} = A(x'),$$

joten $\widetilde{A}$ on hyvinmääritelty. Se on myös lineaarikuvaus, sillä kun $x, y \in M$ ja $c \in R$, missä $(R, +, \cdot)$ on käsiteltävien modulien yhteinen kerroinrengas, niin

$$\begin{aligned} \widetilde{A}((x + L) + (y + L)) &= \widetilde{A}((x + y) + L) \\ &= A(x + y) = A(x) + A(y) \\ &= \widetilde{A}(x + L) + \widetilde{A}(y + L) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(c(x + L)) &= \widetilde{A}(cx + L) \\ &= A(cx) = cA(x) = c\widetilde{A}(x + L), \end{aligned}$$

missä laskuja on lyhennetty merkinnällä $L = \operatorname{Ker}(A)$.

Selvästi $\mathrm{Im}(\widetilde{A}) = \mathrm{Im}(A)$ ja yhtälö $A = \widetilde{A} \circ p$ seuraa suoraan kuvauksen $\widetilde{A}$ määritelmästä: $A(x) = \widetilde{A}(x + L) = \widetilde{A}(p(x))$. Tarkistetaan vielä, että $\widetilde{A}$ on injektio. Olkoon nimittäin $x \in M$ sellainen, että $x + L \in \operatorname{Ker}(\widetilde{A})$ eli $\widetilde{A}(x + L) = \bar{0}_N$. Kuvauksen $\widetilde{A}$ määritelmästä saadaan tällöin $A(x) = \widetilde{A}(x + L) = \bar{0}_N$, joten $x \in \operatorname{Ker}(A) = L$. Siis $x + L = \bar{0}_M + L$, ts. $\operatorname{Ker}(\widetilde{A}) = \{\bar{0}_M + L\} = \{\bar{0}_{M/L}\}$. Siis $\widetilde{A}$ on injektiivinen ja surjektiivinen lineaarikuvaus $M/L \to \mathrm{Im}(A)$ eli $\widetilde{A}\colon M/\operatorname{Ker}(A) \cong \mathrm{Im}(A)$. □

2.7. Lause. *Olkoon V vektoriavaruus ja U sen aliavaruus. Tällöin*

$$\dim(V) = \dim(V/U) + \dim(U).$$

Todistus. Valitaan aliavaruudelle U komplementti C V:ssä, jolloin siis $V = U \oplus C$. Tällöin lauseen 2.4 nojalla $C \cong V/U$, joten lauseesta 1.5 saadaan

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(C) = \dim(U) + \dim(V/U). \quad \square$$

3. Operaattoriavaruudet

Edellä on tarkasteltu modulien karteesisia tuloja, ts. jos M_i, $i \in I$, ovat R-moduleita, niin $\prod_{i \in I} M_i$ voidaan luonnollisella tavalla varustaan R-modulin rakenteella. Erikoistapaus tästä on karteesinen potenssi, jolloin lähtöavaruus on yksi ja sama N. Siis erityisesti ${}^I N$ on R-moduli, kun N on R-moduli. Edelleen tämän erikoistapaus saadaan, kun $I = M$ on myös R-moduli: Kun M ja N ovat R-moduleita, niin ${}^N M$ on luonnollisella tavalla R-moduli. Merkitään

$$\mathsf{L}(M, N) = \{\, A\colon M \to N \mid A \text{ lineaarikuvaus} \,\} \subseteq {}^M N.$$

Jos $M = N$, merkitään lyhyemmin $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(M, M)$.

3.1. Lause. *Olkoot M ja N vaihdannaisen renkaan $(R, +, \cdot)$ moduleita. Tällöin $\mathsf{L}(M, N)$ on ${}^M N$:n alimoduli.*

Todistus. Riittää tarkastaa, että $\mathsf{L}(M, N)$ toteuttaa alimodulikriteerit. Olkoot $A, B \in \mathsf{L}(M, N)$ ja $c \in R$.

$\boxed{0}$ Nollakuvaus $0\colon M \to N$, $0 = \bar{0}_N$ on tietenkin lineaarinen eli $0 \in \mathsf{L}(M, N)$.

$\boxed{1}$ Määritelmän mukaan $A + B$ on kuvaus $A + B\colon M \to N$, $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$. On tarkastettava, että $A + B$ on lineaarinen. Olkoot $x, y \in M$ ja $r \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(A + B)(x + y) &= A(x + y) + B(x + y) \\
&= (A(x) + A(y)) + (B(x) + B(y)) && \mid A \text{ ja } B \text{ ovat lineaarisia} \\
&= (A(x) + B(x)) + (A(y) + B(y)) && \mid (N, +) \text{ on Abelin ryhmä} \\
&= (A + B)(x) + (A + B)(y)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(A + B)(rx) &= A(rx) + B(rx) \\
&= rA(x) + rB(x) && \mid A \text{ ja } B \text{ ovat lineaarisia} \\
&= r(A(x) + B(x)) && \mid N \text{ on } R\text{-moduli} \\
&= r(A + B)(x).
\end{aligned}$$

Siis $A + B \in \mathsf{L}(M, N)$.

$\boxed{2}$ Määritelmänsä mukaan cA on kuvaus $cA\colon M \to N$,, $(cA)(v) = c(A(v))$. Olkoot $x, y \in M$ ja $r \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(cA)(x+y) &= c(A(x+y)) \\
&= c(A(x) + A(y)) && \mid A \text{ on lineaarinen} \\
&= c(A(x)) + c(A(y)) && \mid \text{osittelusääntö } N\text{:ssä} \\
&= (cA)(x) + (cA)(y)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(cA)(rx) &= c(A(rx)) \\
&= c(rA(x)) && \mid A \text{ on lineaarinen} \\
&= (cr)(A(x)) && \mid N \text{ on moduli} \\
&= (rc)(A(x)) && \mid \text{kerroinrengas on vaihdannainen} \\
&= r(c(A(x))) = r(cA)(x).
\end{aligned}$$

Siis cA on lineaarikuvaus, joten $cA \in \mathsf{L}(M, N)$. $\square$

3.2. Lause. *Kun M on moduli, missä kerroinrengas on vaihdannainen, niin* $(\mathsf{L}(M), +, \circ)$ *on rengas.*

Todistus. Kerätään kasaan, mitä rakenteesta $(\mathsf{L}(M), +, \circ)$ valmiiksi tiedetään: Ensinnäkin edellisen lauseen nojalla $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(M, M)$ on R-moduli, joten erityisesti $(\mathsf{L}(M), +)$ on Abelin ryhmä. $(\mathsf{L}(M), \circ)$ on monoidi, sillä lineaarikuvausten yhdistetyt kuvaukset ovat myös lineaarisia, kuvausten yhdistäminen on liitännäistä, ja $\mathrm{id}_M \in \mathsf{L}(M)$ on rakenteen ykkösalkio.

Jäljelle jää osittelulakien tarkastus: Olkoot $A, B, C \in \mathsf{L}(M)$ ja $x \in M$. Tällöin suoraan kuvausten summan määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned}
((A+B) \circ C)(x) &= (A+B)(C(x)) = A(C(x)) + B(C(x)) \\
&= (A \circ C)(x) + (B \circ C)(x) = (A \circ C + B \circ C)(x),
\end{aligned}$$

joten $(A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C$. Käyttämällä myös kuvauksen A lineaarisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
(A \circ (B+C))(x) &= A((B+C)(x)) = A(B(x) + C(x)) = A(B(x)) + A(C(x)) \\
&= (A \circ B)(x) + (A \circ C)(x) = (A \circ B + A \circ C)(x).
\end{aligned}$$

Siis myös $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$.

Koska $(\mathsf{L}(M), +)$ on Abelin ryhmä, $(\mathsf{L}(M), \circ)$ on monoidi, ja osittelulait pätevät, niin $(\mathsf{L}(M), +, \circ)$ on rengas. $\square$

3.3. Määritelmä.

a) Renkaan $(R, +, \cdot)$ alkiota $a \in R$ kutsutaan *kääntyväksi*, jos sillä on käänteisalkio. Rakennetta $(R^*, \cdot)$ kutsutaan *R:n kertolaskuryhmäksi*. Renkaan alkio $a \in R$ on *nilpotentti*, jos $a^n = 0$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$.

b) Puoliryhmän $(S, \cdot)$ alkiota $a \in S$ kutsutaan *idempotentiksi*, jos $a^2 = a$. Jos puoliryhmässä $(S, \cdot)$ on ykkösalkio eli se on monoidi, niin *involuutioita* ovat ne alkiot $a \in S$, joille $a^2 = 1$, mutta $a \neq 1$.

3.4. Määritelmä. Kun M on vaihdannaisen renkaan moduli, niin $(\mathsf{L}(M), \circ)$:n kääntyvien alkioiden joukkoa merkitään $\mathrm{GL}(M)$:llä. Tällöin $(\mathrm{GL}(M), \circ)$ kutsutaan M:n *lineaariseksi ryhmäksi*.

3.5. Lause. $(\mathrm{GL}(M), \circ)$ *on todella ryhmä.*

Todistus. Tiedetään, että jos $A \colon M \to M$ on kääntyvä $\mathsf{L}(M)$:n alkio täsmälleen silloin, kun se on modulin M automorfismi, jolloin myös A^{-1} on kääntyvä lineaarikuvaus. Edelleen jos $A, B \in \mathrm{GL}(M)$ eli $A, B \colon M \to M$ ovat kääntyviä lineaarikuvauksia, niin yhdistetty kuvaus $A \circ B$ on lineaarikuvauksien yhdisteenä lineaarikuvaus ja bijektioiden yhdisteenä bijektio, jolloin $A \circ B \in \mathrm{GL}(M)$. Siis $\circ$ on $\mathrm{GL}(M)$:n hyvinmääritelty laskutoimitus.

Kuvausten yleisestä liitännäisyydestä seuraa, että laskutoimitus $\circ$ on liitännäinen $\mathrm{GL}(M)$:ssä. Koska id_M on lineaarinen ja itsensä käänteiskuvaus, niin se on $\mathrm{GL}(M)$:n ykkösalkio. Koska $\mathrm{GL}(M)$ on käänteiskuvausten suhteen suljettu, niin kaikilla sen alkioilla on myös käänteisalkio.
$\square$

3.6. Määritelmä. Olkoon M moduli. Lineaarikuvaus $P \colon M \to M$ on *projektio*, jos $P \circ P = P$.

3.7. Esimerkki. Suoraan summaan voidaan aina liittää projektio. Olkoon M nimittäin moduli, jonka voi esittää muodossa $M = N \oplus L$. Asetetaan $P \colon M \to M$, $P(x) = y$, missä alkio y määräytyy vektorin $x \in M$ yksikäsitteisestä esityksestä $x = y + z$, jossa $y \in N$ ja $z \in L$. On suoraviivaista osoittaa, että P on lineaarikuvaus: Olkoot nimittäin $x_0, x_1 \in M$ ja $c \in R$, missä $(R, +, \cdot)$ on kerroinrengas. Valitaan yksikäsitteiset $y_0, y_1 \in N$ ja $z_0, z_1 \in L$, joille $x_0 = y_0 + z_0$ ja $x_1 = y_1 + z_1$. Tällöin

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= (y_0 + z_0) + (y_1 + z_1) = \underbrace{(y_0 + y_1)}_{\in N} + \underbrace{(z_0 + z_1)}_{\in L} \\ cx_0 &= c(y_0 + z_0) = \underbrace{cy_0}_{\in N} + \underbrace{cz_0}_{\in L}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} P(x_0 + x_1) &= y_0 + y_1 = P(x_0) + P(x_1) \text{ ja} \\ P(cx_0) &= cy_0 = cP(x_0). \end{aligned}$$

P on ilmeinen projektio, sillä edelleen $P(P(x_0)) = P(y_0) = P(y_0 + 0) = y_0$. Projektion P kuvajoukko on selvästi $\mathrm{Im}(P) = N$. Vektorille $x \in M$ pätee $P(x) = 0$, jos ja vain jos x:n esitys asianomaisena summana on $x = 0 + x$, missä $x \in L$. Siis $\mathrm{Ker}(P) = L$.

Osoitetaan jatkossa, että esimerkin tapa on oleellisesti ainoa tapa muodostaa projektioita.

3.8. Lause. *Olkoon* $P \in \mathsf{L}(M)$ *projektio. Tällöin* $M = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$*, ja kun* $y \in \mathrm{Im}(P)$ *ja* $z \in \mathrm{Ker}(P)$*, niin* $P(y + z) = y$.

Todistus. Olkoon $x \in M$. Merkitään $y = P(x) \in \mathrm{Im}(P)$ ja $z = x - y$. Tällöin $x = y + z$ ja koska P on projektio, niin

$$P(z) = P(x - y) = P(x) - P(y) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = \bar{0},$$

joten $z \in \mathrm{Ker}(P)$. Siis $M = \mathrm{Im}(P) + \mathrm{Ker}(P)$.

Osoitetaan suoruuskriteerillä, että tarkasteltava summa on suora. Olkoon siis $t \in \mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(P)$, jolloin toisaalta jollain $x \in M$ pätee $t = P(x)$ ja toisaalta $P(t) = 0$. Yhdistämällä nämä tiedot ja käyttämällä sitä, että P on projektio, saadaan

$$t = P(x) = P(P(x)) = P(t) = 0.$$

Siis $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{\bar{0}\}$ ja $M = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$.

Kun $y \in \mathrm{Im}(P)$ ja $z \in \mathrm{Ker}(P)$, niin jollakin $x \in M$ pätee $P(x) = y$ ja

$$P(y + z) = P(y) + P(z) = P(P(x)) + \bar{0} = P(x) = y. \quad \square$$

3.9. Määritelmä. Projektion $P\colon M \to M$ sanotaan olevan *projektio N:lle suuntaan L*, jos $N = \mathrm{Im}(P)$ ja $L = \mathrm{Ker}(P)$.

3.10. Seuraus. *Modulin M alimodulilla N on komplementti, jos ja vain jos on olemassa projektio $P\colon M \to M$ modulille N.*

Todistus. Jos on olemassa projektio $P \in \mathsf{L}(M)$ modulille N, niin edellisen lauseen mukaan $M = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P) = N \oplus \mathrm{Ker}(P)$, joten $\mathrm{Ker}(P)$ on alimodulin N komplementti. Jos kääntäen N:llä on komplementti L eli $M = N \oplus L$, niin esimerkissä 3.7 on muodostettu projektio $P \in \mathsf{L}(M)$, jolle $\mathrm{Im}(P) = N$. $\square$

3.11. Määritelmä. Olkoon M R-moduli, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Tällöin R-modulia $\mathsf{L}(M, R)$ kutsutaan M:n *duaaliksi* ja merkitään M^*:llä.