IV Lineaarikuvausten analysointia

1. Matriisit

Kun I, J ja X ovat joukkoja, kuvausta $f\colon I \times J \to X$ kutsutaan (X-*arvoiseksi*) (I, J)-*matriisiksi*. Yleensä merkitään $f = (f(i,j))_{(i,j)\in I\times J}$.

Olkoot U ja V vektoriavaruuksia, joilla on kannat E ja F. Lineaarikuvauksen A *matriisi kantojen E ja F* suhteen on matriisi

$$\mathrm{M}(A, E, F) = (\lambda_{e,f})_{(f,e)\in F\times E},$$

missä kertoimet saadaan ehdosta $A(e) = \sum_{f\in F} \lambda_{e,f} f$, kun $e \in E$.

2. Ominaisarvot ja spektrit

2.1. Määritelmä. Olkoon M R-moduli ja $A \in \mathrm{L}(M)$. Vektori $x \in M \setminus \{\bar{0}\}$ on lineaarikuvauksen A *ominaisvektori*, jos jollakin $\lambda \in R$ pätee $A(x) = \lambda x$. Edellä esiintyvää skalaaria λ kutsutaan lineaarikuvauksen A *ominaisarvoksi*. Tässä tilanteessa x on ominaisarvoa λ *vastaava ominaisvektori*. $M_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_M - A)$ on ominaisarvoa λ vastaava *ominaismoduli*. Joukkoa

$$\mathrm{P}\sigma(A) = \{\, \lambda \in R \mid \lambda \text{ on lineaarikuvauksen } A \text{ ominaisarvo} \,\}$$

kutsutaan A:n *pistespektriksi*.

Havaintoja:

1) $x \in V \setminus \{\bar{0}\}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori täsmälleen silloin, kun

$$Ax = \lambda x = (\lambda\,\mathrm{id}_V)(x) \iff (A - \lambda\,\mathrm{id}_V)(x) = \bar{0} \iff x \in \mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_V - A).$$

2) Siis ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus on

$$M_\lambda = \{\bar{0}\} \cup \{\, x \in M \mid x \text{ on ominaisarvoa } \lambda \text{ vastaava ominaisvektori} \,\}.$$

Kun $\lambda \in R$ ei ole ominaisarvo, voidaan asettaa $M_\lambda = \{\bar{0}\}$.

3) $\lambda \in R$ on ominaisarvo, jos ja vain jos $M_\lambda \neq \{\bar{0}\}$ eli $\mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_V - A) \neq \{\bar{0}\}$, mikä injektiivisyyskriteerin II.1.5 nojalla on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lambda\,\mathrm{id}_V - A$ ei ole injektio.

4) Siis

$$\mathrm{P}\sigma(A) = \{\, \lambda \in R \mid \lambda\,\mathrm{id}_V - A \text{ ei ole injektio} \,\}.$$

5) Huomattakoon erityisesti, että A on injektio, jos ja vain jos $0 - A$ on injektio, jos ja vain jos $0 \in \mathrm{P}\sigma(A)$.
   Nämä havainnot motivoivat seuraavan määritelmän.

2.2. Määritelmä. Olkoon V K-vektoriavaruus ja $A \in \mathsf{L}(V)$. Tällöin A:n *spektri* on

$$\sigma(A) = \{\, \lambda \in K \mid \lambda \operatorname{id}_V - A \text{ ei ole kääntyvä } \mathsf{L}(V)\text{:ssa} \,\}.$$

Huomautus. Kuvaus $\lambda \operatorname{id}_V$ samastetaan usein skalaarin λ kanssa, jolloin edellisessä yhtälössä esiintyvää kuvausta voi merkitä $\lambda - A = \lambda \operatorname{id}_V - A$.

2.3. Lause. *Olkoon $A \in \mathsf{L}(V)$, missä V on äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tällöin $\sigma(A) = \mathrm{P}\sigma(A)$.*

Todistus. Aiemmin osoitetusta osan II lauseesta 2.5 seuraa, että äärellisulotteisessa tapauksessa

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\iff \lambda - A \text{ ei ole bijektio } V \to V \\ &\iff \lambda - A \text{ ei ole injektio} \\ &\iff \lambda \in \mathrm{P}\sigma(A). \quad \square \end{aligned}$$

2.4. Lause. *Olkoon $A \in \mathsf{L}(V)$, missä V on vektoriavaruus. Tällöin ominaisavaruuksien V_λ, $\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)$, summa $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)} V_\lambda$ on suora.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että summa $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)} V_\lambda$ ei olisikaan suora. Summan suoruuden nojalla olisi siis olemassa vektori $z \in \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)} V_\lambda$, jonka voisi esittää kahdella eri tavalla äärellisluonteisena summana:

$$z = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma} x_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma} y_\lambda,$$

missä jokaisella $\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)$ pätee $x_\lambda, y_\lambda \in V_\lambda$ ja jollakin $\mu \in \mathrm{P}\sigma(A)$ pätee $x_\mu = y_\mu$. Merkitsemällä $u_\lambda = x_\lambda - y_\lambda \in V_\lambda$ päädytään yhtälöön

$$\bar{0} = z - z = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma} x_\lambda - \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma} y_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)} (x_\lambda - y_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)} u_\lambda.$$

Koska summat ovat äärellisluonteisia, niin $I = \{\, \lambda \in V \mid u_\lambda \neq \bar{0} \,\}$ on äärellinen. Lisäksi $\mu \in I$. Voidaan olettaa, että vektorijonot $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)}$ ja $(y_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{P}\sigma(A)}$ on valittu niin, että I on mahdollisimman pieni.

Merkitään $k = |I| \in \mathbb{N}$. Koska $\mu \in I$, niin $I \neq \emptyset$. Ei voi myöskään olla $I = \{m\}$, sillä $u_\mu \neq \bar{0}$, joten $k \geq 2$. Käyttämällä hyväksi sitä, että ominaisvektorit skaalautuvat kuvauksessa A, saadaan

$$\sum_{\lambda \in I} \mu u_\lambda = \mu \sum_{\lambda \in I} u_\lambda = \mu \cdot \bar{0} = \bar{0} = A(\bar{0}) = A\Big(\sum_{\lambda \in I} u_\lambda\Big) = \sum_{\lambda \in I} A(u_\lambda) = \sum_{\lambda \in I} \lambda u_\lambda,$$

mistä seuraa

$$\bar{0} = \sum_{\lambda \in I} \lambda u_\lambda - \sum_{\lambda \in I} \mu u_\lambda = \sum_{\lambda \in I} (\lambda - \mu) u_\lambda = \sum_{\lambda \in I \setminus \{\mu\}} (\lambda - \mu) u_\lambda.$$

Koska $|I \setminus \{\mu\}| = k - 1 < k$ ja $k - 1 \neq 0$, niin tämä on tietenkin ristiriidassa sen kanssa, että I oli pienin mahdollinen epätyhjä joukko ominaisarvoja, joista vastaavista ominaisvektoreista saadaan summana nollavektori. Siis vastaoletus on kumottu. $\square$

3. Duaali

3.1. Määritelmä. Olkoon M R-moduli, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Modulia $M^* = \mathsf{L}(M, R)$ kutsutaan M:n *duaaliksi* ja M^*:n vektoreita *lineaarisiksi muodoiksi*. Kun $x \in M$ ja $x^* \in M^*$, käytetään myös symmetrisoivaa merkintää $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

3.2. Määritelmä. Olkoot M, N ja P R-moduleita. Kuvaus $f\colon M \times N \to P$ on *bilineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ ja $a \in R$ pätevät ehdot

$$\left.\begin{aligned} f(x + x', y) &= f(x, y) + f(x', y) \\ f(ax, y) &= af(x, y) \end{aligned}\right\} \quad (\textit{vasemmalta lineaarinen})$$
$$\left.\begin{aligned} f(x, y + y') &= f(x, y) + f(x, y') \\ f(x, ay) &= af(x, y) \end{aligned}\right\} \quad (\textit{oikealta lineaarinen}).$$

Jos P on kerroinrengas R R-moduliksi tulkittuna, niin bilineaarikuvausta $f\colon M \times N \to R$ kutsutaan *bilineaariseksi muodoksi*.

3.3. Lause. *Kun M on R-moduli, niin kuvaus $F\colon M \times M^* \to R$, $F(x, x*) = \langle x, x^* \rangle$ on bilineaarinen muoto.*

Todistus. Kuvauksen F oikealta lineaarisuus seuraa kuvauksien summien ja skaalauksen määritelmistä: Kun $x^*, y^* \in M^*$ ja $a \in R$, niin jokaisella $z \in M$ pätee

$$\begin{aligned} \langle z, x^* + y^* \rangle &= (x^* + y^*)(z) = x^*(z) + y^*(z) = \langle z, x^* \rangle + \langle z, y^* \rangle \text{ ja} \\ \langle z, ax^* \rangle &= (ax^*)(z) = a(x^*(z)) = a\langle z, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Vasemmalta lineaarisuus sen sijaan seuraa lineaaristen muotojen lineaarisuudesta: Kun $x, y \in M$, $z^* \in M^*$ ja $a \in R$, niin

$$\begin{aligned} \langle x + y, z^* \rangle &= z^*(x + y) = z^*(x) + z^*(y) = \langle x, z^* \rangle + \langle y, z^* \rangle \text{ ja} \\ \langle ax, z^* \rangle &= z^*(ax) = az^*(x) = a\langle x, z^* \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

3.4. Lause. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon E V:n kanta. Kun $e \in E$, niin kuvaus $f_e\colon E \to K$,*

$$f_e(e') = \delta_{e,e'} = \begin{cases} 1, & \textit{kun } e = e' \\ 0, & \textit{muuten} \end{cases}$$

laajenee yksikäsitteisellä tavalla lineaarikuvaukseksi $e^*\colon V \to K$, ts. $e^* \restriction E = f_e$ ja $e^* \in V^*$. Näiden ns. koordinaattimuotojen joukko $\{ e^* \mid e \in E \}$ on vapaa V^*:ssä. Erityisesti $\dim(V) \leq \dim(V^*)$.

Todistus. Huomattakoon, että kun $e, f' \in E$ ovat eri kantavektoreita, niin $e^* \neq f^*$, sillä esim. $e^*(e) = 1 \neq 0 = f^*(e)$. Siis kuvaus $e \mapsto e^*$ on bijektio $E \to I$, missä $I = \{ e^* \mid e \in E \}$. Tehdään vapaustesti joukolle I. Olkoon siis $(\lambda_e)_{e \in E}$ sellainen äärellisluonteinen kerroinjono, että

$$\sum_{e \in E} \lambda_e e^* = \bar{0}_{V^*}.$$

Kun $f \in E$, niin

$$0 = \bar{0}_{V^*}(f) = \left(\sum_{e\in E} \lambda_e e^*\right)(f) = \sum_{e\in E} \lambda_e e^*(f) = \sum_{e\in E} \delta_{e,f} = \lambda_f.$$

Siis jokaisella $f \in E$ pätee $\lambda_f = 0$, mikä osoittaa joukon I vapaaksi. Tästä seuraa myös $\dim(V) = |E| = |I| \leq \dim(V^*)$. □

3.5. Lause. *Kun V on äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, niin* $\dim(V) = \dim(V^*)$. *Erityisesti V ja V^* ovat tällöin isomorfiset.*

Todistus. Edellisen lauseen perusteella tiedetään, että $I = \{\, e^* \mid e \in E \,\}$ on vapaa ja lauseen todistuksesta ilmeni, etät $|E| = |I|$. Osoitetaan nyt, että I on V^*:n kanta, kun V on äärellisulotteinen. Koska I on vapaa, riittää osoittaa, että $\mathrm{sp}(I) = V^*$. Olkoon $x^* \in V^*$. Merkitään $\lambda_e = x^*(e) \in K$, kun $e \in E$, ja $y^* = \sum_{e\in E} \lambda_e e^*$. Huomattakoon, että koska V on äärellisulotteinen, tämä on äärellinen summa, ja y^* on hyvinmääritelty. Selvästi $y^* \in \mathrm{sp}(I)$, joten riittää osoittaa, että $x^* = y^*$. Todellakin: jokaisella $f \in E$ pätee

$$y^*(f) = \left(\sum_{e\in E} \lambda_e e^*\right)(f) = \sum_{e\in E} \lambda_e e^*(f) = \sum_{e\in E} \lambda_e \delta_{e,f} = \lambda_f = x^*(f),$$

joten $y^* \restriction E = x^* \restriction E$. Koska molemmat ovat lineaarisina muotoina lineaarikuvauksia, osan II lauseesta 2.1 seuraa, että $x^* = y^* \in \mathrm{sp}(I)$. Siten $\mathrm{sp}(I) = V^*$ ja I on V^*:n kanta, mistä seuraa $\dim(V) = |E| = |I| = \dim(V^*)$. □

3.6. Määritelmä. Olkoon U vektoriavaruuden W aliavaruus. Tällöin U:n *kodimensio* on $\mathrm{kodim}(U) = \dim(V)$, missä V on mikä tahansa U:n komplementti. U on W:n *hypertaso*, jos $\mathrm{kodim}(U) = 1$.

Huomautus.

1) Kodimensio on hyvinmääritelty, sillä vektoriavaruuden jokaisella aliavaruudella on olemassa komplementti (osan III lause 1.7), ja jos V ja V' ovat molemmat U:n komplementteja, niin osan III lauseen 2.4 nojalla kaikki U:n komplementit ovat isomorfisia tekijäavaruuden W/U kanssa ja siten keskenään isomorfisia ja samanulotteisia.
2) Jos lisäksi W on äärellisulotteinen, niin summan dimensiokaavasta seuraa, että $\dim(W) = \dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$, joten $\mathrm{kodim}(U) = \dim(V) = \dim(W) - \dim(U)$, ts. aliavaruuden kodimension määrittäminen palautuu sen dimension määrittämiseen. Ääretönulotteisissa avaruuksissa tilanne ei ole näin yksinkertainen.

3.7. Lause. *Olkoon U vektoriavaruuden W aliavaruus. Tällöin U on hypertaso, jos ja vain jos jollakin $x^* \in W^*$, $x^* \neq \bar{0}$, pätee $U = \mathrm{Ker}(x^*)$.*

Todistus. Merkitään kerroinkuntaa $(K, +, \cdot)$:lla. Osoitetaan ensin ehdon riittävyys; oletetaan siis, että $U = \mathrm{Ker}(x^*)$, missä $x^* \in W^* \setminus \{\bar{0}\}$. Koska $x^* \neq \bar{0}$, niin $\mathrm{Im}(x^*) = K$ (K:lla on K-vektoriavaruutena vain kaksi aliavaruutta, nimittäin triviaali aliavaruus $\{0\}$ ja K itse). Olkoon V U:n komplementti. Tällöin vektoriavaruuksien homomorfialauseen (osan II lause 2.5) mukaan $V \cong W/U = W/\mathrm{Ker}(x^*) \cong \mathrm{Im}(x^*) = K$, joten

$$\mathrm{kodim}(U) = \dim(V) = \dim(W/U) = \dim(\mathrm{Im}(x^*)) = \dim(K) = 1.$$

Siis U on hypertaso.

Osoitetaan sitten ehdon välttämättömyys; oletetaan, että U on hypertaso. Valitaan U:lle komplementti V, josta tiedetään, että $\dim(V) = \mathrm{kodim}(U) = 1$. Siis $V = \mathrm{sp}(\{y\})$ jollakin $y \in V \smallsetminus \{\bar{0}\}$. Koska $U \oplus V = W$, niin jokainen $x \in W$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Tästä saadaan edelleen yksikäsitteinen esitys $x = u + ay$, missä $u \in U$ ja $a \in K$. Määritellään nyt kuvaus $x^*\colon W \to K$ asettamalla tässä tilanteessa $x^*(x) = a$. Näin määritelty kuvaus on lineaarinen, sillä jos $z, z' \in W$ ovat vektoreita, joilla on esitykset $z = u + ay$ ja $z' = u + a'y$, missä $u, u' \in U$ ja $a, a' \in K$, sekä $c \in K$ on skalaari, niin

$$x^*(z + z') = x^*((u + ay) + (u' + ay')) = x^*(u + u' + (a + 2')y') = a + a' = x^*(z) + x^*(z') \text{ ja}$$
$$x^*(cz) = x^*(c(u + ay)) = x^*(cu + (ca)y) = ca.$$

Siis x^* on lineaarinen muoto eli $x^* \in W^*$. Koska $x^*(y) = x^*(0 + 1 \cdot y) = 1 \neq 0$, niin $x^* \neq \bar{0}_{W^*}$. Edelleen jokaisella $u \in U$ on voimassa $x^*(u) = u + 0 \cdot y = 0$, joten $U \subseteq \mathrm{Ker}(x^*)$. Jos kääntäen vektorille $z \in W$ pätee $x^*(z) = 0$, niin se tarkoittaa, että vektorin voi kirjoittaa muotoon $z = u + 0 \cdot y = u$ jollakin $u \in U$, joten $z \in U$. Siis $x^* \in V^* \smallsetminus \{\bar{0}_{V^*}\}$ ja $U = \mathrm{Ker}(x^*)$. $\square$

3.8. Lause. *Olkoon U vektoriavaruuden W aito aliavaruus. Tällöin U on sen sisältävien hypertasojen leikkaus, ts. $U = \bigcap \mathcal{H}$, missä $\mathcal{H} = \{\, H \subseteq W \mid H \text{ on hypertaso, jolle } U \subseteq H \,\}$.*

Todistus. Koska U on aito aliavaruus, sen voi laajentaa avaruuden W maksimaaliseksi aidoksi aliavaruudeksi kantalauseen avulla. Siis $\mathcal{H} \neq \emptyset$ ja tietenkin myös $U \subseteq \bigcap \mathcal{H}$. Osoitetaan, että leikkauksessa $\bigcap \mathcal{H}$ ei ole aliavaruuden U ulkopuolelta vektoreita. Olkoon $x \in W \smallsetminus U$. Valitaan aliavaruudelle $U \oplus \mathrm{sp}(\{x\})$ komplementti V (käsiteltävä summa on tietenkin suora osassa III todistetun suoruuskriteerin 1.4 nojalla). Tällöin

$$W = \big(U \oplus \mathrm{sp}(\{x\})\big) \oplus V = (U \oplus V) \oplus \mathrm{sp}(\{x\}),$$

joten $\mathrm{kodim}(U \oplus V) = \dim(\{x\}) = 1$ eli $H = U \oplus V$ on hypertaso, jolle $x \notin H$. Koska $U \subseteq U \oplus V = H$, niin $H \in \mathcal{H}$. Siis $x \notin \bigcap \mathcal{H}$, joten $W \smallsetminus U \subseteq W \smallsetminus \bigcap \mathcal{H}$ eli $\bigcap \mathcal{H} \subseteq U$. Siis $U = \bigcap \mathcal{H}$. $\square$

3.9. Määritelmä. Modulin M *biduaali* on $M^{**} = (M^*)^*$.

3.10. Lause. *Olkoon M R-moduli, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Määritellään luonnollinen kuvaus $C_M\colon M \to M^{**}$ asettamalla*

$$\big(C_M(x)\big)(x^*) = x^*(x) \text{ eli } \langle x^*, C_M(x)\rangle = \langle x, x^*\rangle,$$

kun $x \in M$ ja $x^* \in M^*$. Tällöin C_M on hyvinmääritelty lineaarikuvaus.

Todistus. Todistus on puhtaasti tekninen, mutta eri abstraktiotasojen välillä liikkuminen vaatii hyvää tuntumaa käsitteisiin. Ensiksi todetaan, että jokaisella $x \in M$ kuva $C_M(x)$ on selvästi kuvaus $M^* \to R$, sillä sen arvo on $\big(C_M(x)\big)(x^*) = x^*(x)$. Tavoitemaali on kuitenkin

M^{**}, joten on tarkastettava, että $C_M(x)$ on jopa lineaarinen muoto: Kun $y^*, z^* \in M^*$ ja $a \in R$, niin

$$\big(C_M(x)\big)(y^* + z^*) = (y^* + z^*)(x) = y^*(x) + z^*(x) = \big(C_M(x)\big)(y^*) + \big(C_M(x)\big)(z^*) \text{ ja}$$
$$\big(C_M(x)\big)(ay^*) = (ay^*)(x) = a(y^*(x)) = a\big(C_M(x)\big)(x).$$

Siis $C_M(x) \in M^{**}$, joten C_M on hyvinmääritelty kuvaus $M \to M^{**}$.

Osoitetaan sitten, että C_M on lineaarinen. Olkoot $x, y \in M$, $a \in R$ ja $z^* \in M^*$. Tällöin z^*:n lineaarisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}\big(C_M(x+y)\big)(z^*) &= z^*(x+y) = z^*(x) + z^*(y) = \big(C_M(x)\big)(z^*) + \big(C_M(y)\big)(z^*)\\ &= \big(C_M(x) + C_M(y)\big)(z^*)\end{aligned}$$

ja

$$\big(C_M(ax)\big)(z^*) = z^*(ax) = az^*(x) = a\big(C_M(x)\big)(z^*).$$

Siis $C_M(x+y) = C_M(x) + C_M(y)$ ja $C_M(ax) = aC_M(x)$, joten C_M on lineaarikuvaus. □

3.11. Lause. *Kun V on K-vektoriavaruus, niin luonnollinen kuvaus $C_V : V \to V^{**}$ on lineaarinen upotus eli injektio.*

Todistus. Käytetään injektiivisyyskriteeriä (osan II lause 1.5). Olkoon $x \in \mathrm{Ker}(C_V)$ eli $C_V(x) = \bar{0}_{V^{**}}$. Siis kaikilla $x^* \in V^*$ pätee $x^*(x) = \big(C_V(x)bigr)(x^*) = \bar{0}_{V^{**}}(x^*) = \bar{0}$. Tästä seuraa, että $x = \bar{0}$ (jos $x \neq \bar{0}$, niin on olemassa $x^* \in V^*$, jolle $x^*(x) \neq \bar{0}$, mikä jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi). Siis $\mathrm{Ker}(C_V) = \{\bar{0}\}$ ja C_V on injektio. □

3.12. Määritelmä. Olkoon M R-moduli, jonka kerroinrengas on vaihdannainen. Vektorien $x \in M$ ja $x^* \in M^*$ sanotaan olevan *kohtisuorat* eli *ortogonaaliset*, jos $\langle x, x^* \rangle = 0$. Olkoon $S \subseteq M$ ja $T \subseteq M^*$. Joukon S *kohtisuora eli ortogonaali alimoduli* on

$$S^\circ = \{\, x^* \in M^* \mid \forall x \in S(\langle x, x^* \rangle = 0)\,\} \subseteq M^*.$$

Joukon T *ortogonaali M:ssä* on vastaavasti

$$T^\circ = \{\, x \in M \mid \forall x^* \in T(\langle x, x^* \rangle = 0)\,\} \subseteq M.$$

3.13. Lause. *Olkoon M vaihdannaisen renkaan moduli, $S \subseteq M$ ja $T \subseteq M^*$. Tällöin S° on M^*:n ja T° M:n alimoduli.*

Todistus. Käydään molemmissa tapauksissa läpi alimodulikriteerit. Olkoot ensin $x^*, y^* \in S^\circ$ ja $a \in R$.

$\boxed{0}$ Duaalin nolla-alkio on nollakuvaus, joten kaikilla $x \in M$ pätee $\langle x, \bar{0}_{M^*} \rangle = \bar{0}_{M^*}(x) = 0$. Erityisesti $\bar{0}_{M^*}$ on kohtisuorassa jokaista S:n alkiota vastaan, joten $\bar{0}_{M^*} \in S^\circ$.

$\boxed{1}$ Jokaisella $z \in S$ pätee

$$\langle z, x^* + y^* \rangle = \langle z, x^* \rangle + \langle z, y^* \rangle = 0 + 0 = 0,$$

joten $x^* + y^* \in S^\circ$.

$\boxed{2}$ Jokaisella $z \in S$ saadaan

$$\langle z, ax^* \rangle = a\langle z, x^* \rangle = a \cdot 0 = 0,$$

joten $x^* \in S^\circ$.

Siis S° on duaalin M^* alimoduli.

Olkoot sitten $x, y \in T^\circ$ ja $a \in R$. Tässä tapauksessa sovelletaan duaalin alkioiden lineaarisuutta.

$\boxed{0}$ Jokaisella $z^* \in M^*$ pätee $\langle \bar{0}, x^* \rangle = 0$, joten erityisesti $\bar{0} \in T^\circ$.

$\boxed{1}$ Jokaisella $z^* \in T$ on voimassa

$$\langle x + y, z^* \rangle = \langle x, z^* \rangle + \langle y, z^* \rangle = 0 + 0 = 0,$$

joten $x^* + y^* \in T^\circ$.

$\boxed{2}$ Jokaisella $z \in S$ saadaan

$$\langle ax, z^* \rangle = a\langle x, z^* \rangle = a \cdot 0 = 0,$$

joten $x^* \in T^\circ$.

Siis T° on modulin M alimoduli. $\square$

3.14. Lause. *Olkoon V vektoriavaruus ja U sen aliavaruus. Tällöin $U^{\circ\circ} = (U^\circ)^\circ = U$.*

Todistus. Suoraan kohtisuoruuden määritelmän nojalla kaikille $x \in U$ ja kaikille $y^* \in U^\circ$ pätee $\langle x, y^* \rangle = 0$. Kun tätä väittämää luetaan vektorien x ja y^* roolit vaihtaen, huomataan, että jokainen $x \in U$ kuuluu V:n aliavaruuteen $U^{\circ\circ}$ eli $U \subseteq U^{\circ\circ}$.

Käänteisen sisältyvyyden osoittamiseksi tehdään hieman valmistelevaa työtä. Valitaan aliavaruudelle U kanta E ja laajennetaan se koko avaruuden V kannaksi F. Tarkastellaan koordinaattimuotoja f^*, kun $f \in F$ (ks. lausetta 3.4). Jokaisella $f \in F \setminus E$ koordinaattimuodolle f^* pätee seuraavaa: Kun $e \in E$, niin $\langle e, f^* \rangle = f^*(e) = \delta_{f,e} = 0$. Jokainen $u \in U$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa $u = \sum_{e \in E} \lambda_e e$, joten

$$\langle u, f^* \rangle = \langle \sum_{e \in E} \lambda_e e, f^* \rangle = \sum_{e \in E} \lambda_e \langle e, f^* \rangle = \sum_{e \in E} \lambda_e 0 = 0.$$

Siis $f^* \in U^\circ$.

Olkoon $x \in V \setminus U$. Tällöin vektorin x esityksessä kannan lineaarikombinaationa $x = \sum_{e \in F} \lambda_e e$ on oltava kerroin $\lambda_f \neq 0$, missä $f \in F$. Siten

$$\langle x, f^* \rangle = \langle \sum_{e \in E} \lambda_e e, f^* \rangle = \sum_{e \in E} \lambda_e \langle e, f^* \rangle \sum_{e \in E} \lambda_e \delta_{e,f} = \lambda_f \neq 0.$$

Koska $f^* \in U^\circ$, tämä osoittaa, että $x \notin U^{\circ\circ}$. Siis $W \setminus U \subseteq W \setminus U^{\circ\circ}$ eli $U^{\circ\circ} \subseteq U$. Yhdistämällä tämä aiempaan sisältyvyyteen saadaan, että $U = U^{\circ\circ}$ $\square$

4. Transpoosi

4.1. Määritelmä. Olkoot M ja N R-moduleita, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Lineaarikuvauksen $A\colon M \to N$ *transpoosi* on kuvaus ${}^{\mathrm{t}}A\colon N^* \to M^*$, $\big({}^{\mathrm{t}}A\big)(y^*) = y^* \circ A$.

$$\begin{tikzcd}
 & R & \\
M \arrow[ur, dashed, "\substack{({}^{\mathrm{t}}A)(y^*)\\ =y^*\circ A}"] \arrow[rr, "A"'] & & N \arrow[ul, "y^*"']
\end{tikzcd}$$

4.2. Lause. *Kun M, N ja A ovat kuten edellisessä määritelmässä, niin ${}^{\mathrm{t}}A$ on lineaarikuvaus.*

Todistus. Kun $x \in M$, $y^*, z^* \in N^*$ ja $c \in R$, niin

$$\begin{aligned}
\big({}^{\mathrm{t}}A(y^* + z^*)\big)(x) &= \big((y^* + z^*) \circ A)\big)(x) = (y^* + z^*)(A(x)) \\
&= y^*(A(x)) + z^*(A(x)) = (y^* \circ A)(x) + (z^* \circ A)(x) \\
&= \big({}^{\mathrm{t}}A(y^*)\big)(x) + \big({}^{\mathrm{t}}A(z^*)\big)(x) = \big({}^{\mathrm{t}}A(y^*) + ({}^{\mathrm{t}}A(z^*)\big)(x).
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\big({}^{\mathrm{t}}A(cy^*)\big)(x) &= \big((cy^*) \circ A\big)(x) = (cy^*)(A(x)) = c(y^*(A(x)) = c\big(y^* \circ A)(x)\big) \\
&= c\big(({}^{\mathrm{t}}A(y^*))(x)\big) = ((c\,{}^{\mathrm{t}}A)(y^*))(x).
\end{aligned}$$

Koska nämä yhtälöt pätevät kaikilla $x \in M$, niin

$${}^{\mathrm{t}}A(y^* + z^*) = {}^{\mathrm{t}}A(y^*) + ({}^{\mathrm{t}}A(z^*) \text{ ja } {}^{\mathrm{t}}A(cy^*) = (c\,{}^{\mathrm{t}}A)(y^*),$$

mikä todistaa transpoosin ${}^{\mathrm{t}}A$ lineaarisuuden. $\square$

4.3. Lemma. *Olkoot M ja N R-moduleita, missä kerroinrengas on vaihdannainen, ja olkoon $A\colon M \to N$ lineaarikuvaus. Olkoon edelleen $F\colon N^* \to M^*$ kuvaus, joka toteuttaa kaikilla $x \in M$ ja $y^* \in N^*$ ehdon $\langle A(x), y^*\rangle = \langle x, F(y^*)\rangle$. Tällöin $F = {}^{\mathrm{t}}A$.*

Todistus. Lemmassa on oikeastaan kyse vain merkintöjen vaihdosta, sillä kuvaukselle F asetetun ehdon nojalla kaikilla $y^* \in N^*$ ja $x \in M$ pätee

$$\big(F(y^*)\big)(x) = \langle x, F(y^*)\rangle = \langle A(x), y^*\rangle = y^*(A(x)) = (y^* \circ A)(x) = \big({}^{\mathrm{t}}A(y^*)\big)(x).$$

Koska tämä pätee kaikilla $x \in M$, niin

$$F(y^*) = {}^{\mathrm{t}}A(y^*),$$

kun $y \in N^*$, mistä vuorostaan seuraa $F = {}^{\mathrm{t}}A$. $\square$

4.4. Lause. *Olkoot M, N ja P vaihdannaisen renkaan $(R,+,\cdot)$ moduleita ja $A\colon M\to N$, $B\colon N\to P$ ja $C\colon M\to N$ R-lineaarikuvauksia sekä $r\in R$. Tällöin:*

1) ${}^{\mathrm t}(A+C)={}^{\mathrm t}A+{}^{\mathrm t}C$ ja ${}^{\mathrm t}rA=r{}^{\mathrm t}A$.

2) Nollakuvauksen $0\colon M\to N$ transpoosi on nollakuvaus ${}^{\mathrm t}0\colon N^*\to M^*$.

3) ${}^{\mathrm t}\,\mathrm{id}_M=\mathrm{id}_{M^*}$.

4) ${}^{\mathrm t}(B\circ A)={}^{\mathrm t}A\circ{}^{\mathrm t}B$.

5) Jos $A\colon M\to N$, niin ${}^{\mathrm t}A\colon N^*\to M^*$.

Todistus. Olkoot $x\in M$ ja $y^*\in N^*$. Sovelletaan edellistä lemmaa.

1) Käyttämällä kulmasulkumerkinnän bilineaarisuutta (lause 3.3) saadaan

$$\begin{aligned}\langle (A+C)(x),y^*\rangle &= \langle A(x)+C(x),y^*\rangle=\langle A(x),y^*\rangle+\langle C(x),y^*\rangle\\ &= \langle x,({}^{\mathrm t}A)(y^*)\rangle+\langle x,({}^{\mathrm t}C)(y^*)\rangle=\langle x,({}^{\mathrm t}A+{}^{\mathrm t}C(y^*)\rangle,\end{aligned}$$

joten ${}^{\mathrm t}(A+C)={}^{\mathrm t}A+{}^{\mathrm t}C$. Vastaavasti

$$\langle (rA)(x),y^*\rangle=\langle r(A(x)),y^*\rangle=r\langle A(x),y^*\rangle=r\langle x,{}^{\mathrm t}A(y^*)\rangle=\langle x,r{}^{\mathrm t}A(y^*)\rangle,$$

joten ${}^{\mathrm t}rA=r({}^{\mathrm t}A)$.

2) Nollakuvaukselle pätee

$$\langle 0(x),y^*\rangle=\langle\bar 0,y^*\rangle=0=\langle x,0(y^*)\rangle,$$

joten nollakuvauksen $0\colon M\to N$ transpoosi on nollakuvaus $0\colon N^*\to M^*$.

3) Olkoon $x^*\in M^*$. Tällöin

$$\langle \mathrm{id}_M(x),x^*\rangle=\langle x,x^*\rangle=\langle x,\mathrm{id}_{M^*}(x^*)\rangle,$$

joten ${}^{\mathrm t}(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{M^*}$.

4) Olkoon $z^*\in P^*$. Tällöin

$$\begin{aligned}\langle (BA)(x),z^*\rangle &= \langle B(A(x)),z^*\rangle=\langle A(x),({}^{\mathrm t}B)(z^*)\rangle\\ &= \langle x,{}^{\mathrm t}A\big(({}^{\mathrm t}B)(z^*)\rangle\big)=\langle x,({}^{\mathrm t}A){}^{\mathrm t}B\rangle(z^*),\end{aligned}$$

joten ${}^{\mathrm t}BA={}^{\mathrm t}B{}^{\mathrm t}(A)$.

5) Koska $A\colon M\cong N$, niin $A^{-1}A=\mathrm{id}_M$ ja $AA^{-1}=\mathrm{id}_n$, joten edellisen kohdan avulla saadaan

$$\mathrm{id}_{M^*}={}^{\mathrm t}\,\mathrm{id}_M={}^{\mathrm t}A^{-1}A={}^{\mathrm t}A^{-1\mathrm t}A \text{ ja } \mathrm{id}_{N^*}={}^{\mathrm t}\,\mathrm{id}_N={}^{\mathrm t}AA^{-1}={}^{\mathrm t}A^{\mathrm t}A^{-1},$$

mikä tarkoittaa, että ${}^{\mathrm t}A$:lla on käänteiskuvaus ${}^{\mathrm t}(A^-1)$. Siis ${}^{\mathrm t}A$ on bijektio ja siten isomorfismi duaalien N^* ja M^* välillä. $\square$

4.5. Lause. *Olkoon $A\colon M \to N$ R-lineaarikuvaus, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen, ja $S \subseteq M$. Tällöin $A[S]^\circ = ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}[S^\circ]$.*

Todistus. Määritelmiä purkamalla saadaan

$$\begin{aligned} A[S]^\circ &= \{\, y^{\in} N^* \mid \forall u \in A[S]\big(\langle u, y^*\rangle = 0\big)\,\} \\ &= \{\, y^{\in} N^* \mid \forall x \in S\big(\langle A(x), y^*\rangle = 0\big)\,\} \\ &= \{\, y^{\in} N^* \mid \forall x \in S\big(\langle x, {}^{\mathrm{t}}A(y^*)\rangle = 0\big)\,\} \\ &= \{\, y^{\in} N^* \mid {}^{\mathrm{t}}A(y^*) \in S^\circ\,\} = ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}[S^\circ]. \end{aligned}$$

4.6. Seuraus. *Lauseen tilanteessa erityisesti* $(\mathrm{Im}(A))^\circ = \mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)$.

Todistus. Lauseesta seuraa suoraan

$$(\mathrm{Im}(A))^\circ = (A[M])^\circ = ({}^{\mathrm{t}}(A))^{-1}[M^\circ] = ({}^{\mathrm{t}}(A))^{-1}[\{\bar{0}_{M^*}\}] = \mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A),$$

sillä

$$M^\circ = \{\, x^* \in M^* \mid \forall \in M(\langle x, x^*\rangle = 0)\,\} = \{\, x^* \in M^* \mid \forall \in M(x^*(x) = 0)\,\} = \{\bar{0}_{M^*}\}. \quad \square$$

4.7. Seuraus. *Jos edellisen lauseen tilanteessa A on surjektio, niin ${}^{\mathrm{t}}A$ on injektio.*

Todistus. Tässä tapauksessa siis $\mathrm{Im}(A) = N$ ja $\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) = (\mathrm{Im}(A))^\circ = N^\circ = \{\bar{0}_{N^*}\}$, joten ${}^{\mathrm{t}}A$ on injektio. $\square$

4.8. Lause. *Olkoot U ja V äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja $A\colon U \to V$ niiden välinen lineaarikuvaus. Tällöin*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dom}(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A).$$

Todistus. Merkitään $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$, jolloin myös $n = \dim(V^*)$ lauseen 3.5 perusteella. Transpoosi ${}^{\mathrm{t}}A$ on kuvaus $V^* \to U^*$. Osan II lauseen 1.13 nojalla $\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A))$. Toisaalta seurauksen 4.6 mukaan $\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A) = (\mathrm{Im}(A))^\circ$. Lukijalle jätetään osoitettavaksi, että $\mathrm{Im}(A)^\circ$ on minkä tahansa $\mathrm{Im}(A)$:n komplementin kanssa isomorfinen. Yhdistämällä saadut tulokset saadaan siis

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A) &= n - \dim(\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)) = n - \dim(\mathrm{Im}(A)^\circ) \\ &= n - (n - \dim(\mathrm{Im}(A))) = n - (n - \dim(\mathrm{rg}(A))) = \mathrm{rg}(A). \quad \square \end{aligned}$$