II Lineaarikuvaukset

1. Peruskäsitteitä

Edellisessä osassa modulit rakennettiin vektoreista ja skalaareista lähtien, ja käytiin läpi modulien ja vektoriavaruuksien peruskäsitteitä niin, että kussakin yksittäisessä tapauksessa tarkasteltiin jonkin yksittäisen modulin sisäistä rakennetta. Lineaarialgebrassa kuitenkin on keskeistä, sekä teorian että sovellusten kannalta, että tarkastellaan modulien välisiä, rakenteen riittävästi säilyttäviä kuvauksia, joita kutsutaan lineaarikuvauksiksi. Tämä toisaalta mahdollistaa modulien keskinäisten suhteiden tarkastelun, toisaalta sovellusten kannalta lineaarikuvauksilla on itseisarvonsa. Tässä luvussa käydään läpi lineaarikuvausten peruskäsitteet, ja erityisesti tarkastellaan, miten lineaarikuvaukset kuvaavat virittäjistöjä, vapaita joukkoja ja kantoja, sekä miten tähän asiaan vaikuttaa, onko kuvaus injektio tai surjektio.

1.1. Määritelmä. Olkoot L ja M R-moduleita. Kuvaus $A\colon L \to M$ on *lineaarikuvaus* (eli *R-lineaarikuvaus*, jos halutaan korostaa kerroinrengasta), jos kaikilla $x, y \in L$ ja $c \in M$ pätee

$$A(x + y) = A(x) + A(y)$$

ja

$$A(cx) = cA(x).$$

Lineaarikuvausta kutsutaan myös *lineaariseksi operaattoriksi*. Jos lineaarikuvaus $A\colon L \to M$ on bijektio, sitä kutsutaan *(lineaariseksi) isomorfismiksi*. Tällöin modulien L ja M sanotaan olevan *isomorfiset*, mitä merkitään $L \cong M$ tai jos korostetaan sitä, että A välittää isomorfismin, niin $A\colon L \cong M$. Isomorfismia $A\colon L \cong L$ (avaruudesta L itseensä) kutsutaan *automorfismiksi*.

Huomautus. Lineaarikuvauksien yhteydessä sulut jätetään usein pois, ts. merkitään $Ax = A(x)$.

Seuraava yksinkertainen tulos jätetään harjoitustehtäväksi.

1.2. Lause. *Kun $A\colon L \to M$ on R-lineaarikuvaus, niin $A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M$ ja kaikilla $x \in L$ pätee $A(-x) = -A(x)$.* $\square$

1.3. Määritelmä. Kun $A\colon L \to M$ on lineaarikuvaus, niin joukkoa

$$\operatorname{Ker}(A) = A^{-1}[\{\bar{0}_M\}] = \{\, x \in L \mid Ax = \bar{0}_M \,\}$$

kutsutaan lineaarikuvauksen A *ytimeksi* ja joukkoa

$$\operatorname{Im}(A) = A[L] = \{\, Ax \mid x \in L \,\}$$

kuvaksi.

1.4. Lause. *Olkoon $A\colon L \to M$ lineaarikuvaus.*

a) Jos L_0 on L:n alimoduli, niin $A[L_0]$ on M:n alimoduli. Erityisesti $\mathrm{Im}(A)$ *on M:n alimoduli.*

b) Jos M_0 on M:n alimoduli, niin $A^{-1}[M_0]$ on L:n alimoduli. Erityisesti $\mathrm{Ker}(A)$ *on L:n alimoduli.*

Todistus. On suoraviivaista tarkistaa molemmissa tapauksissa alimodulikriteeri (osan 1 lause 3.4).

a) Olkoot $u, v \in A[L_0]$ ja $c \in R$. Valitaan $x, y \in L_0$, joille $u = A(x)$ ja $v = A(y)$. Tällöin:

$\boxed{0}$ Koska $\bar{0}_L \in L_0$, niin $\bar{0}_M = A(\bar{0}_L) \in A[L_0]$.

$\boxed{1}$ $u + v = A(x) + A(y) = A(x + y) \in A[L_0]$, sillä $x + y \in L_0$.

$\boxed{2}$ $cu = cA(x) = A(cx)$, sillä $cx \in L_0$.

Siis $A[L_0]$ on M:n alimoduli.

b) Olkoot $x, y \in A^{-1}[M_0]$ ja $c \in R$, jolloin $A(x), A(y) \in M_0$. Saadaan

$\boxed{0}$ $A(\bar{0}_L) = 0_M \in M_0$, joten $\bar{0}_L \in A^{-1}[M_0]$.

$\boxed{1}$ $A(x + y) = A(x) + A(y) \in M_0$, joten $x + y \in A^{-1}[M_0]$.

$\boxed{2}$ $A(cx) = xA(x) \in M_0$, josta seuraa $cx \in A^{-1}[M_0]$.

Siis $A^{-1}[M_0]$ on L:n alimoduli. $\square$

Määritelmistä seuraa triviaalisti, että lineaarikuvaus $A\colon L \to M$ on surjektio, jos ja vain jos $\mathrm{Im}(A) = M$. Vastaavanlaisen kriteerion johtaminen injektiivisyydelle vaatii hippusen työtä.

1.5. Lause. *(Injektiivisyyskriteerio) Olkoon $A\colon L \to M$ lineaarikuvaus. Tällöin A on injektio täsmälleen silloin, kun* $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}_L\}$.

Todistus. Koska $A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M$, niin joka tapauksessa $\bar{0}_L \in \mathrm{Ker}(A)$. Toisaalta jos A on injektio, niin kaikilla $x \in L \setminus \{\bar{0}_L\}$ pätee $x \neq \bar{0}_L \Rightarrow A(x) \neq A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M$, joten $x \notin \mathrm{Ker}(A)$. Tällöin saadaan siis $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}_L\}$.

Oletetaan kääntäen, että injektiivisyyskriteerio pätee eli $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}_L\}$. Olkoot $x, y \in L$ eri vektoreita. Injektiivisyyskriteerion perusteella tällöin $x - y \notin \mathrm{Ker}(A)$, joten $A(x - y) \neq \bar{0}_M$, mistä seuraa $A(x) = A(y + (x - y)) = A(y) + A(x - y) \neq A(y)$. Siis A on injektio. $\square$

1.6. Lause. *Olkoon $A\colon L \to M$ lineaarikuvaus ja $S \subseteq L$. Tällöin*

$$A[\mathrm{sp}(S)] = \mathrm{sp}(A[S]).$$

Erityisesti jos S virittää L:n, niin $A[S]$ virittää $\mathrm{Im}(A)$*:n.*

Todistus. Koska $\mathrm{sp}(S)$ on L:n alimoduli, lauseen 1.4 mukaan $A[\mathrm{sp}(S)]$ on M:n alimoduli. Sisältyvyydestä $S \subseteq \mathrm{sp}(S)$ seuraa $A[S] \subseteq A[\mathrm{sp}(S)]$, joten $A[\mathrm{sp}(S)]$ on M:n alimoduli, jolle $A[S] \subseteq A[\mathrm{sp}(S)]$. Toisaalta $\mathrm{sp}(A[S])$ on pienin alimoduli, joka sisältää $A[S]$:n, joten $\mathrm{sp}(A[S]) \subseteq A[\mathrm{sp}(S)]$.

Olkoon kääntäen $y \in A[\mathrm{sp}(S)]$. Valitaan $x \in \mathrm{sp}(S)$, jolle $y = A(x)$. Esitetään vektori $x \in \mathrm{sp}(S)$ lineaarikombinaationa $x = \sum_{v \in S} \lambda_v v$, jolloin

$$y = A(x) = A\Big(\sum_{v \in S} \lambda_v v\Big) = \sum_{v \in S} \lambda_v A(v)$$

paljastuu lineaarikombinaatioksi $A[S]$:n vektoreista. Siis $y \in \mathrm{sp}(A[S])$.

Väitteen loppuhuomautus on helposti perusteltu: Jos S virittää L:n eli $\mathrm{sp}(S) = L$, niin $\mathrm{Im}(A) = A[L] = A[\mathrm{sp}(S)] = \mathrm{sp}(A[S])$ eli $A[S]$ virittää $\mathrm{Im}(A)$:n. □

1.7. Lause. *Olkoon $A\colon L \to M$ lineaarinen injektio ja I vapaa L:ssä. Tällöin $A[I]$ on vapaa M:ssä.*

Todistus. Tehdään määritelmänmukainen vapaustesti $A[I]$:lle. Olkoon $y = \sum_{x\in I} \lambda_x A(x)$ lineaarikombinaatio $A[I]$:n vektoreista (huomaa, että $A[I]$:n vektorit pystyy A:n injektiivisyyden vuoksi indeksoimaan toistotta I:n vektoreilla), jolle vapaustestin mukaisesti pätee $y = \bar{0}_M$. Tällöin

$$A(\bar{0}_L) = \bar{0}_M = y = \sum_{x\in I} \lambda_x A(x) = A\Big(\sum_{x\in I} \lambda_x x\Big),$$

ja koska A on injektio, saadaan

$$\bar{0}_L = \sum_{x\in I} \lambda_x x.$$

Koska I on vapaa, niin vapaustestistä joukkoon I sovellettuna saadaan, että jokaisella $x \in I$ pätee $\lambda_x = 0$. Siis $A[I]$ on vapaa M:ssä. □

1.8. Lause. *Olkoon $A\colon L \to M$ lineaarinen injektio. Tällöin jos E on L:n kanta, niin $A[E]$ on $\mathrm{Im}(A)$:n kanta.*

Todistus. Koska E on kantana vapaa L:ssä, niin edellisen lauseen nojalla $A[E]$ on M:ssä ja siten myös $\mathrm{Im}(A)$:ssa. Toisaalta lauseesta 1.6 saadaan, että $\mathrm{sp}(A[E]) = A[\mathrm{sp}(E)] = A[L] = \mathrm{Im}(A)$, joten $A[E]$ on myös $\mathrm{Im}(A)$:n virittäjistö. Siis $A[E]$ on $\mathrm{Im}(A)$:n kanta. □

2. Vektoriavaruuksien lineaarikuvaukset

Lineaarikuvausten käsittely helpottuu oleellisesti, jos lähtöavaruudella on kanta. Tällöin lineaarikuvaus määräytyy sen perusteella, miten kanta kuvautuu. Koska kantalauseen nojalla jokaisella vektoriavaruudella on olemassa kanta, tyydytään tässä luvussa käsittelemään lähinnä vektoriavaruuksien välisiä lineaarikuvauksia, vaikka osa tuloksista yleistyy vapaisiin moduleihin.

2.1. Lause. *Olkoot L ja M R-vektoriavaruuksia. Olkoon E L:n kanta, joten moduli L on vapaa. Tällöin jokaista kuvausta $f\colon E \to M$ vastaa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $A\colon L \to M$, jolle $A{\restriction}E = f$.*

Todistus. On itse asiassa helpompaa osoittaa ensin kuvauksen A yksikäsitteisyys, sillä laskemalla paljastuu, että kuvauksella A on jokaisessa kohdassa $x \in L$ on vain yksi mahdollinen arvo: Olkoon $x \in L$. Esitetään x kantavektorien lineaarikombinaationa: $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e$. Tällöin

$$A(x) = A\Big(\sum_{e\in E} \lambda_e e\Big) = \sum_{e\in E} A(\lambda_e e) = \sum_{e\in E} \lambda_e A(e) = \sum_{e\in E} \lambda_e f(e).$$

Siis $A(x)$:n arvo määräytyy kuvauksen f saamista arvoista, joten voi olla olemassa korkeintaan yksi lineaarikuvaus, jolle $A\restriction E = f$.

Osoitetaan toisaalta, että jos kuvaus $A\colon U \to V$ määritellään asettamalla

$$A(x) = \sum_{e\in E} \lambda_e f(e),$$

kun $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e \in L$, niin syntyvä kuvaus on lineaarinen. Olkoot $x, y \in L$ ja $c \in R$. Vektoreilla x ja y on yksikäsitteiset esitykset $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e$ ja $y = \sum_{e\in E} \mu_e e$ kantavektorien lineaarikombinaatioina. Kuvauksen A määritelmällä saadaan

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A\Big(\sum_{e\in E} \lambda_e e + \sum_{e\in E} \mu_e e\Big) = A\Big(\sum_{e\in E} (\lambda_e + \mu_e) e\Big) \\ &= \sum_{e\in E} (\lambda_e + \mu_e) f(e) = \sum_{e\in E} \lambda_e f(e) + \sum_{e\in E} \mu_e f(e) = A(x) + A(y) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} A(cx) &= A\Big(c\sum_{e\in E} \lambda_e e\Big) = A\Big(\sum_{e\in E} c\lambda_e e\Big) \\ &= \sum_{e\in E} c\lambda_e f(e) = c\sum_{e\in E} c la_e f(e) = cA(x). \end{aligned}$$

Siis määritelty kuvaus A on lineaarinen. $\square$

2.2. Lause. *Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia. Tällöin $U \cong V$ täsmälleen silloin, kun* $\dim(U) = \dim(V)$.

Todistus. Osoitetaan ensin dimensioehdon välttämättömyys. Oletetaan siis, että $A\colon U \cong V$. Valitaan vektoriavaruudelle U kanta E, jolloin lauseen 1.8 nojalla $A[E]$ on kuva-avaruuden $\mathrm{Im}(A) = V$ kanta, sillä A on erityisesti surjektio. Koska A on bijektio, myös rajoittuma $A\restriction E\colon E \to A[E]$ on bijektio. Siis

$$\dim(U) = |E| = |A[E]| = \dim(V).$$

Osoitetaan sitten, että ehto on myös riittävää. Oletetaan siis dimensioehto $\dim(U) = \dim(V)$. Valitaan vektoriavaruuksille U ja V kannat E ja F, jotka dimensioehdon nojalla ovat yhtämahtavat. Siis on olemassa bijektio $g\colon E \to F \subseteq V$. Edellistä lausetta soveltamalla huomataan, että on olemassa lineaarikuvaus $A\colon U \to V$, jolle $A\restriction E = g$. Kuvaus A on surjektio, sillä $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{sp}(A[E]) = \mathrm{sp}(F) = V$. Riittää enää todeta, että A täyttää injektiivisyyskriteerin 1.5. Olkoon $x \in \mathrm{Ker}(A)$. Esitetään x kannan E lineaarikombinaationa: $x = \sum_{e\in E} \lambda_e e$. Koska $x \in \mathrm{Ker}(A)$, niin

$$\bar{0} = A(x) = A\left(\sum_{e\in E} \lambda_e e\right) = \sum_{e\in E} \lambda_e A(e).$$

Koska $g = A\restriction E$ on kantojen välinen bijektio, niin $A(e)$ käy läpi kannan F vektorit toistotta, kun e käy läpi kannan E vektorit. Koska esitykset kantavektorien lineaarikombinaatioina ovat yksikäsitteisiä, on siis oltava $\lambda_e = 0$ kaikilla $e \in E$, mistä seuraa $x = \bar{0}$. Siis $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}\}$. $\square$

2.3. Määritelmä. Olkoon $A\colon U \to V$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus. Tällöin kuvauksen A *aste* on

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

A on *äärellisasteinen*, jos $\mathrm{rg}(A) \in \mathbb{N}$.

Luvun loppupuolella todistetaan äärellisasteisista lineaarikuvauksista tulos, joka on helpompi mieltää, kun sitä vertaa seuraavaan joukko-opilliseen faktaan.

Fakta. Olkoon A äärellinen joukko ja $f\colon A \to A$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) $f\colon A \to A$ on bijektio.
b) f on injektio.
c) $f\colon A \to A$ on surjektio.

Tavoitteena olevassa analogisessa tuloksessa äärelliset joukot korvataan äärellisulotteisilla avaruuksilla ja kuvaukset lineaarikuvauksilla. Analogisen tuloksen todistaminen onnistuu, koska monet asiat palautuvat vektoriavaruuksien kantoihin, jotka ovat tässä tapauksessa äärellisiä.

2.4. Lemma. *Olkoon $A\colon U \to V$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus.*

a) $\mathrm{rg}(A) \leq \dim(U)$.
b) Jos A on injektio, niin $\mathrm{rg}(A) = \dim(U)$.
c) Jos A on äärellisasteinen muttei injektio, niin $\mathrm{rg}(A) < \dim(U)$.

Todistus. Valitaan vektoriavaruudelle U kanta E.

a) Koska E virittää U:n, niin $A[E]$ virittää kuva-avaruuden $\mathrm{Im}(A)$ lauseen 1.6 nojalla, joten osan I lauseesta 4.18 saadaan

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq |A[E]| \leq |E| = \dim(U).$$

b) Jos A on injektio, niin $A[E]$ on yhtämahtava E:n kanssa ja U:n kanta (ks. lausetta 1.8), joten $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A) = |A[E]| = |E| = \dim(U)$.

c) Oletetaan, että A ei ole injektio mutta on äärellisasteinen. Jos U on ääretönulotteinen, niin väite on triviaalisti totta, joten oletetaan, että $\dim(U) \in \mathbb{N}$. Valitaan $u \in \mathrm{Ker}(A) \smallsetminus \{\bar{0}\}$, ja laajennetaan vapaa yksiö $\{\bar{0}\}$ avaruuden U kannaksi F, jolloin siis $u \in F$. Tiedetään, että $A[F]$ virittää $\mathrm{Im}(A)$:n, mutta tietenkin myös $A[F] \smallsetminus \{\bar{0}\}$ virittää $\mathrm{Im}(A)$:n ja $A(u) = \bar{0} \in A[F]$. Koska F on äärellinen ($|F| = \dim(U) \in \mathbb{N}$), niin seuraa

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq |A[F] \smallsetminus \{\bar{0}\}| = |A[F]| - 1 \leq |F| - 1 = \dim(U) - 1 < \dim(U). \quad \square$$

2.5. Lause. *Olkoot U ja V äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joille* $\dim(U) = \dim(V)$, *sekä $A\colon U \to V$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

a) $A\colon U \cong V$.
b) A on injektio.
c) $A\colon U \to V$ on surjektio.
d) $\mathrm{Ker}(A) = \{\bar{0}_U\}$.
e) $\mathrm{rg}(A) = \dim(V)$.

Todistus. Kokoamalla yhteen määritelmien tietoja ja aiempia tuloksia todetaan, että seuraavat yhtäpitävyydet ja implikaatiot pitävät paikkansa.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{b)} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[ddr, Leftrightarrow] & \text{d)} \\
\text{a)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & \text{c)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{e)}
\end{tikzcd}
$$

Käydään läpi kaavio vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Jos $A\colon U \cong V$, niin A on erityisesti bijektio. Bijektiiviset kuvaukset ovat suoraan määritelmän mukaan injektioita ja surjektioita, joten kohdasta a seuraavat kohdat b ja c. Injektiivisyyskriteerin (lause 1.5) nojalla väitteen kohdat b ja d ovat yhtäpitävät.

Jos $A\colon U \to V$ on surjektio on surjektio (kohta c), niin kuvauksen asteen ja surjektiivisuuden määritelmät yhdistämällä saadaan $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(V)$ eli kohta e. Kääntäen jos $\mathrm{rg}(A) = \dim(V)$ eli $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(V)$, niin $\mathrm{Im}(A)$ on V:n aliavaruus, jolla on sama dimensio kuin sillä itsellään. Koska V on äärellisulotteinen, niin tästä seuraa $V = \mathrm{Im}(A)$, kuten laskuharjoituksia on todettu. Siis kohdat c ja e ovat yhtäpitävät.

Kaavion todentamiseksi riittää enää osoittaa kohtien b ja e yhtäpitävyys, joka seuraa nopeasti edellisestä lemmasta. Jos nimittäin A on injektio, niin lemman kohdan b nojalla $\mathrm{rg}(A) = \dim(U) = \dim(V)$. Jos taas A ei ole injektio, niin lemman kohdan c mukaan $\mathrm{rg}(A) < \dim(U) = \dim(V)$ ja siten $\mathrm{rg}(A) \neq \dim(V)$, sillä maaliavaruuden V äärellisulotteisuudesta seuraa kuvauksen A äärellisasteisuus. Siis kohdat b ja e ovat yhtäpitävät.

Kaavio riittää todentamaan kaikkien kohtien yhtäpivävyyden. Kahdensuuntaisia nuolia seuraamalla nimittäin todetaan, että kohdat b–e ovat yhtäpitäviä. Vasemmanpuoleisista implikaatioista saadaan siis, että kohdasta a seuraavat kohdat b–e. Toisaalta jos yksikin kohdista b–e pätee, niin sitten pätevät kaikki, jolloin A on sekä injektio että surjektio (kohtien b ja c mukaan), joten A on bijektio ja isomorfismi. Siis kohta a on yhtäpitävä muitten kanssa. $\square$