V Tensoritulot

Modulien duaalien yhteydessä huomattiin, että bilineaarikuvauksia syntyy luonnollisista yhteyksistä. Itse asiassa vaihdannaisen renkaan $(R, +, \cdot)$ kertolasku $\cdot$ on yksinkertaisimpia esimerkkejä R-bilineaarikuvauksesta. Multilineaarikuvauksen käsite puolestaan on bilineaarikuvauksen käsitteen luonnollinen yleistys, mutta esityksen keventämiseksi se esitellään vasta ulkotulojen yhteydessä tämän osan kolmannessa luvussa. Bilineaarikuvaukset (tai yleisemmin multilineaarikuvaukset) ovat vain poikkeuksellisissa tapauksissa lineaarikuvauksia tai toisin päin, kuten laskuharjoituksissa huomataan. Syystäkin herää siis kysymys, ovatko bilineaarikuvaukset lineaarialgebrallisten menetelmien ulottumattomissa.

Näin ei kuitenkaan ole: Tässä osassa tarkastellaan tensorituloja, jotka ovat ennen kaikkea mekanismi, jonka avulla multilineaarikuvauksiin liittyviä kysymyksiä voidaan palauttaa lineaarikuvauksia koskeviksi kysymyksiksi. Palautuksissa käytetään tensoritulojen universaalisuusominaisuutta, joka on keskeisin ensimmäisessä luvussa todistetuista tuloksista. Tensoritulokonstruktio ei ole poikkeuksellisen raskas, mutta se on perin abstrakti. Tämän tähden tensoritulo muodostetaan ensimmäisessä luvussa vain kahden modulin välille, jolloin universaalisuusominaisuus avulla löydetään nimenomaan bilineaarikuvausta, ei yleisesti multilineaarikuvausta, vastaava lineaarikuvaus. Palautuksessa bilineaarikuvauksen lähtöjoukko, kahden modulin karteesinen tulo, korvautuu näiden tensoritulolla.

Kuten tyypillistä lineaarialgebrassa muutenkin, tensorituloja koskevat käsitteet pystytään yleensä muotoilemaan moduleissa, mutta monet tulokset - tai niiden todistukset - toimivat yleisesti vain vektoriavaruuksissa.

1. Tensoritulon konstruktio

Tensoritulo konstruoidaan seuraavassa määritelmässä vaiheittain niin, että ensimmäisessä vaiheessa konstruoidaan apumoduli, jota näissä luennoissa kutsutaan modulien esitensorituloksi. Tämä on itse asiassa niihin kerrottaviin moduleihin verrattuna monellakin tavoin mitaten huikean suuri moduli. Varsinainen tensoritulo saadaan esitensoritulosta samastamalla vektoreita sopivasti niin, että tensoritulosta tulee lopulta bilineaarikuvaus.

1.1. Määritelmä. Olkoot M ja N R-moduleita, missä kerroinrengas $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Määritellään modulien M ja N tensoritulo ja tensoritulokuvaus $\otimes\colon M \times N \to M \otimes N$ kahdessa vaiheessa. Konstruktio lähtee liikkeelle R-modulista

$$M \boxtimes N = \{\, z\colon M \times N \to R \mid \operatorname{supt}(z) \text{ on äärellinen} \,\},$$

jota kutsuttakoon modulien M ja N *esitensorituloksi* ja jonka alkioita *esitensoreiksi*. Kun $x \in M$ ja $y \in N$, merkitään $x \boxtimes y$:llä $M \boxtimes N$:n esitensoria, jolle jokaisella $x' \in M$ ja $y' \in N$ on voimassa

$$(x \boxtimes y)(x', y') = \begin{cases} 1, & \text{jos } (x, y) = (x', y') \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

eli $(x \boxtimes y)(x', y') = \delta_{(x,y),(x',y')} = \delta_{xx'}\delta_{yy'}$. $M \boxtimes N$:n vektorien samastamiseksi merkitään $S = \mathrm{sp}(C)$, missä

$$\begin{aligned} C =& \{\, (ax) \boxtimes y - a(x \boxtimes y) \mid x \in M, y \in N, a \in R \,\} \\ & \cup \{\, x \boxtimes (ay) - a(x \boxtimes y) \mid x \in M, y \in N, a \in R \,\} \\ & \cup \{\, (x + x') \boxtimes y - (x \boxtimes y + x' \boxtimes y) \mid x, x' \in M, y \in N \,\} \\ & \cup \{\, x \boxtimes (y + y') - (x \boxtimes y + x \boxtimes y') \mid x \in M, y, y' \in N \,\}. \end{aligned}$$

Modulien M ja N *tensoritulo* $M \otimes N$ on tekijämoduli

$$M \otimes N = (M \boxtimes N)/S.$$

Vektorien $x \in M$ ja $y \in N$ *tensoritulo* on $x \otimes y = x \boxtimes y + S$. *Tensoritulokuvaus* on $\otimes \colon M \times N \to M \otimes N$, $\otimes(x, y) = x \otimes y$. Tensoritulon $M \otimes N$ alkioita kutsutaan *tensoreiksi*.

1.2. Lause. *Olkoot M, N ja R kuten tensoritulon määritelmässä. Tällöin tensoritulokuvaus $\otimes \colon M \times N \to M \otimes N$ on bilineaarinen.*

Todistus. Ilmeisen symmetrian vuoksi riittää tarkastella vasemmanpuoliset bilineaarisuusehdot. Olkoot $x, x' \in L$, $y \in M$ ja $a \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned} (ax) \otimes y &= (ax) \boxtimes y + S = a(x \boxtimes y) + \underbrace{(ax) \boxtimes y - a(x \boxtimes y)}_{\in C \subseteq S} + S \\ &= a(x \boxtimes y) + S = a((x \boxtimes y) + S) = a(x \otimes y) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= (x + x') \boxtimes y + S \\ &= x \boxtimes y + x' \boxtimes y + \underbrace{((x + x') \boxtimes y - x \boxtimes y - x' \boxtimes y)}_{\in C \subseteq S} + S \\ &= (x \boxtimes y + x' \boxtimes y) + S = (x \boxtimes y + S) + (x' \boxtimes y + S) \\ &= x \otimes y + x' \otimes y. \quad \square \end{aligned}$$

Todistus. (*vaihtoehtoinen*) Merkitään symbolilla $\sim$ määritelmän tekijäoperaatiota vastaavaa kongruenssia, ts. kun $t, t' \in M \boxtimes N$, niin $t \sim t' \iff t - t' \in S$. Tällöin jokaisella $x, x' \in L$, $y \in M$ ja $a \in R$ pätevät kongruenssit

$$\begin{aligned} &(x + x') \boxtimes y \sim (x \boxtimes y) + (x' \boxtimes y), \quad (ax) \boxtimes y \sim a(x \boxtimes y) \\ &x \boxtimes (y + y') \sim (x \boxtimes y) + (x \boxtimes y') \text{ ja } x \boxtimes (ay) \sim a(x \boxtimes y), \end{aligned}$$

sillä vastaavat erotukset kuuluvat joukkoon $C \subseteq S$. Siis

$$\begin{aligned} &(x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y), \quad (ax) \otimes y = a(x \otimes y) \\ &x \otimes (y + y') = (x \otimes y) + (x \otimes y') \text{ ja } x \otimes (ay) = a(x \otimes y), \end{aligned}$$

mikä todistaa tensoritulokuvauksen $\otimes$ bilineaarisuuden. $\square$

Tensoritulon määritelmästä seuraa suoraviivaisesti, että $M \boxtimes N$:n alkioille (esitensoreille) ja tensoreille saadaan tietynlaiset esitykset alkuperäisten modulien vektorien avulla.

1.3. Lemma. *Edellisen määritelmän oletuksin ja merkinnöin jokaiselle $z \in M \boxtimes N$ on olemassa äärellinen indeksijoukko J ja jokaisella $j \in J$ skalaari λ_j sekä vektorit $x_j \in M$ ja $y_j \in N$, joille*

$$z = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \boxtimes y_j).$$

Edelleen tensorille $t \in M \times N$ saadaan esitys

$$t = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i,$$

missä I on äärellinen ja jokaisella $i \in I$ pätee $u_i \in M$ ja $v_i \in N$.

Todistus. Määritelmän mukaan $J = \operatorname{supt}(z)$ on äärellinen; asetetaan jokaisella $j = (x, y) \in J$ kertoimeksi $\lambda_j = z(x, y)$ ja vektoreiksi $x_j = x$ sekä $y_j = y$. Siten kun $(u, v) \in M \times N$, niin

$$\lambda_j (x_j \boxtimes y_j)(u, v) = z(x, y)\delta_{x,u}\delta_{y,v} = \begin{cases} z(x, y) & \text{jos } (x, y) = (u, v) \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tästä seuraa, että $z = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \boxtimes y_j)$. Jos nimittäin $k = (u, v) \in J$, niin

$$\Big(\sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \boxtimes y_j)\Big)(u, v) = \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{j,k} = \lambda_k = z(u, v),$$

jos taas $(u, v) \in M \times N \setminus J$, niin $(u, v) \notin \operatorname{supt}(z)$, joten edellä lasketun perusteella

$$\Big(\sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \boxtimes y_j)\Big)(u, v) = 0 = z(u, v).$$

Tensorin $t \in M \otimes N$ tapauksessa valitaan ensin $z \in M \boxtimes N$, jolle $t = z + S$, ja tälle esitensorille z ylläolevan kaltainen esitys. Merkitään sitten $I = J$ ja jokaisella $i \in I = J$ ensin $u_i = \lambda_i x_i$ ja sitten $v_i = y_i$. Tensoritulon bilineearisuuden avulla saadaan tällöin

$$\begin{aligned} t = z + S = \Big(\sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \boxtimes y_j)\Big) + S &= \sum_{j \in J} \lambda_j \big((x_j \boxtimes y_j) + S\big) = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j \otimes y_j) \\ &= \sum_{j \in J} (\lambda_j x_j) \otimes y_j = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i. \quad \square \end{aligned}$$

1.4. Lause. *Olkoon $g \colon L \times M \to N$ R-bilineaarikuvaus ja $A \colon N \to P$ R-lineaarikuvaus. Tällöin $A \circ g$ on R-bilineaarinen.*

Todistus. Olkoot $x, x' \in L$, $y, y' \in M$ ja $c \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned} (A \circ g)(x + x', y) &= A(g(x + x', y)) = A(g(x, y) + g(x', y)) \\ &= A(g(x, y)) + A(g(x', y)) = (A \circ g)(x, y) + (A \circ g)(x', y) \end{aligned}$$

ja

$$(A \circ g)(cx, y) = A(g(cx, y)) = A(cg(x, y)) = cA(g(x, y)) = c(A \circ g)(x, y).$$

Symmetrisesti johdetaan myös oikeanpuoleiseen lineaarisuuteen liittyvät yhtälöt

$$(A \circ g)(x, y + y') = (A \circ g)(x, y) + (A \circ g)(x, y') \text{ ja } (A \circ g)(x, cy) = c(A \circ g)(x, y).$$

Siis $A \circ g$ on bilineaarinen. $\square$

1.5. Seuraus. *Olkoot L, M ja N vaihdannaisen renkaan $(R, +, \cdot)$ moduleja ja $A\colon L \otimes M \to N$ lineaarikuvaus. Tällöin kuvaus $f\colon L \times M \to N$, $f(x, y) = A(x \otimes y)$ on bilineaarinen.*

Todistus. Sovelletaan edellistä lausetta tilanteessa, jossa $g = \otimes$, jolloin saadaan, että $f = A \circ \otimes$ on bilineaarinen, koska A on lineaarinen ja $\otimes$ bilineaarinen. $\square$

1.6. Lause. *(Tensoritulojen universaalisuusominaisuus vektoriavaruuksille.) Olkoot U, V ja W R-moduleita, joiden kerroinrengas on vaihdannainen, ja $f\colon U \times V \to W$ K-bilineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarikuvaus $A\colon U \otimes V \to W$, jolle $f = A \circ \otimes$.*

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[dr, dashed, "A \text{ lin.}"] & \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[rr, "f \text{ bilin.}"'] & & W
\end{tikzcd}$$

Todistus. Olkoot S ja C kuten tensoritulon määritelmässä, ja $p\colon U \boxtimes V \to U \otimes V = (U \boxtimes V)/S$ tekijäkuvaus $p(z) = z + S$. Muodostetaan lauseen väitteen kaavio apukuvauksen $B\colon U \boxtimes V \to W$ kautta seuraavasti:

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[ddr, dashed, "A"] & \\
U \otimes V \arrow[ur, "p"] \arrow[drr, dashed, "B"] & & \\
U \times V \arrow[u, "\boxtimes"] \arrow[rr, "f"'] & & W\,.
\end{tikzcd}$$

Esitensoritulolla $U \boxtimes V = K^{(U \times V)}$ on funktioavaruutena (ns. heikkona potenssina) luonnollinen kanta
$$E = \{\, x \boxtimes y \mid x \in U, y \in V \,\}.$$

Siksi on olemassa yksikäsitteinen K-lineaarikuvaus $B\colon U \boxtimes V \to W$, jolle $B(x \boxtimes y) = f(x, y)$, kun $x \in U$ ja $y \in V$. Selvästi $f = B \circ \boxtimes$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{Ker}(p) = S \subseteq \mathrm{Ker}(B)$. Kun $x, x' \in U$, $y, y' \in V$ ja $c \in K$, niin B:n lineaarisuuden ja f:n bilineaarisuuden tähden

$$\begin{aligned}
&B(x \boxtimes (cy) - c(x \boxtimes y)) = B(x \boxtimes cy) - cB(x \boxtimes y) \\
&\quad = f(x, cy) - cf(x, y) = cf(x, y) - cf(x, y) = \bar{0} \\
&\qquad \text{ja} \\
&B(x \boxtimes (y + y') - (x \boxtimes y + x \boxtimes y')) = B(x \boxtimes (y + y')) - B(x \boxtimes y + x \boxtimes y') \\
&\quad = B(x \boxtimes (y + y')) - B(x \boxtimes y) - B(x \boxtimes y') \\
&\quad = f(x, y + y') - f(x, y) - f(x, y') = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Siis
$$x \boxtimes (cy) - c(x \boxtimes y), \quad x \boxtimes (y + y') - (x \boxtimes y + x \boxtimes y') \in \mathrm{Ker}(B).$$

Aivan vastaavasti osoitetaan, että myös

$$(cx) \boxtimes y - c(x \boxtimes y), \quad (x + x') \boxtimes y - (x \boxtimes y + x' \boxtimes y) \in \operatorname{Ker}(B).$$

Koska tämä pätee kaikilla $x, x' \in U$, $y, y' \in V$ ja $c \in K$, niin $C \subseteq \operatorname{Ker}(B)$, mistä seuraa $\operatorname{Ker}(p) = S = \operatorname{sp}(C) \subseteq \operatorname{Ker}(B)$.

Asetetaan $A \colon U \otimes V \to W$, $A(t) = B(z)$, missä $z \in U \boxtimes V$ on mikä tahansa esitensori, jolle $t = z + S$. Kuvaus A on hyvinmääritelty, sillä jos $t = z + S = z' + S$, niin $z - z_0 \in S \subseteq \operatorname{Ker}(B)$, mistä seuraa $B(z) = B((z - z') + z') = B(z - z') + B(z') = \bar{0} + B(z') = B(z')$. Suoraan määritelmän perusteella myös $A(p(z)) = B(z)$, kun $z \in U \boxtimes V$, joten $A = B \circ p$. Selvästi A on myös lineaarinen. Lopuksi havaitaan, että

$$f = B \circ \boxtimes = (A \circ p) \circ \boxtimes = A \circ (p \circ \boxtimes) = A \circ \otimes.$$

□

Edellinen tulos yleistyy moduleille. Vaikka moduleilla ei välttämättä ole kantaa (erityisesti moduleilla M ja N allaolevassa lauseessa ei tarvitse olla), niin esitensoriavaruus $M \boxtimes N$ on aina rakenteeltaan heikkona potenssina vapaa moduli, joten sillä on kanta. Siten osan III lausetta 2.1 voi soveltaa myös modulien tapauksessa, ja todistus etenee aivan kuten vektoriavaruuksien tapauksessa.

1.7. Lause. *(Tensoritulojen universaalisuusominaisuus moduleille.) Olkoot M, N ja P R-moduleita, joiden kerroinrengas on vaihdannainen, ja $f \colon M \times N \to P$ R-bilineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarikuvaus $A \colon M \otimes N \to P$, jolle $f = A \circ \otimes$.*

$$\begin{tikzcd} & M \otimes N \arrow[dr, dashed, "A"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[rr, "f"'] & & P \end{tikzcd}$$

□

1.8. Lause. *Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia, joilla on kannat E ja F. Tällöin $\{ e \otimes f \mid e \in E, f \in F \}$ on tensoritulon $U \otimes F$ kanta, joten* $\dim(U \otimes V) = \dim(U)\dim(V)$.

Todistus. Merkitään

$$G = \{ e \otimes f \mid e \in E, f \in F \}.$$

Olkoon $t \in U \otimes V$. Lemman 1.3 nojalla tensorille t saadaan esitys $t = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i$, missä I on äärellinen ja jokaisella $i \in I$ pätee $u_i \in U$ ja $v_i \in V$. Koska E on U:n kanta ja F V:n kanta, niin jokaisella $i \in I$ vektoreilla u_i ja v_i on esitykset

$$u_i = \sum_{e \in E} \lambda_{i,e} e \text{ ja } v_i = \sum_{f \in F} \mu_{i,f} f,$$

missä summat ovat äärellisluonteisia. Sijoittamalla nämä esitykset tensorin t esitykseen saadaan tensoritulon bilineaarisuutta käyttäen

$$\begin{aligned} t = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i &= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{e \in E} \lambda_{i,e} e \Big) \otimes \Big(\sum_{f \in F} \mu_{i,f} f \Big) \\ &= \sum_{i \in I, e \in E, f \in F} \lambda_{i,e} \mu_{i,f} (e \otimes f) \in \operatorname{sp}(G). \end{aligned}$$

Siis $\mathrm{sp}(G) = U \otimes V$ eli G on virittäjistö.

Tehdään sitten vapaustesti joukolle G: Olkoon $(a_{e,f})_{e\in E, f\in F}$ sellainen äärellisluonteinen kerroinjono K:n alkioita, että

$$\sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}(e \otimes f) = \bar{0}_{U\otimes V}.$$

Jotta kertoimet onnistuttaisiin osoittamaan nolliksi, sovelletaan tensoritulojen universaalisuusominaisuutta. Olkoot $e_0 \in E$ ja $f_0 \in F_0$. Valitaan ensin lineaariset muodot $x^* \in U^*$ ja $y^* \in V^*$ niin, että $x^*(e) = \delta_{e,e_0}$ ja $y^*(f) = \delta_{f,f_0}$, kun $e \in E$ ja $f \in F$ (jälleen osan II lauseen 2.1 sovellus). Kuvaus $h\colon U \times V \to K$, $h(u,v) = x^*(u)y^*(v)$ on tällöin bilineaarinen harjoituksissa todistetun perusteella. Tensoritulojen universaalisuusominaisuuden (lause 1.6) nojalla on olemassa lineaarikuvaus $A\colon U \otimes V \to K$, jolle $h = A \circ \otimes$. Erityisesti

$$\begin{aligned}
0 = A(\bar{0}_{U\otimes V}) &= A\Big(\sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}(e\otimes f)\Big) = \sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}A(e\otimes f)\\
&= \sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}h(e,f) = \sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}x^*(e)y^*(f)\\
&= \sum_{e\in E, f\in F} a_{e,f}\delta_{e,e_0}\delta_{f,f_0} = a_{e_0,f_0}.
\end{aligned}$$

Koska $a_{e_0,f_0} = 0$ pätee kaikilla $e_0 \in E$ ja $f_0 \in F$, niin G on vapaa. Siten G on kanta ja dimensioille pätee

$$\dim(U\otimes V) = |G| = |E \times F| = |E||F| = \dim(U)\dim(V). \quad \square$$

2. Tensorin aste

2.1. Määritelmä. Olkoot M ja N R-moduleita, missä $(R, +, \cdot)$ on vaihdannainen. Tensorin $t \in M \otimes N$ *aste* $\mathrm{rg}(t)$ on pienin $k \in \mathbb{N}$, jolla on olemassa $x_0, \ldots, x_{k-1} \in M$ ja $y_0, \ldots, y_{k-1} \in N$, joille

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i.$$

Huomautus. Tensorien esitystä koskevan lemman 1.3 nojalla tensorin aste on hyvinmääritelty. Jatkossa osoittautuu, että käsite on myös epätriviaali, ts. yleensä tensorille pätee $\mathrm{rg}(t) > 1$.

2.2. Esimerkki. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ tensoreita. Merkitään totutusti $\mathbb{R}^2$:n standardikantaa $\{e_0, e_1\}$:llä. Jos tensorin aste on nolla, niin määritelmää vastaava summa on tyhjä summa, joten $\bar{0}_{\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2}$ on ainoa tensori t, jolle $\mathrm{rg}(t) = 0$. Selvästi kantavektoreiden tuloina saatavat tensorit

$$e_0 \otimes e_0,\ e_0 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_0 \text{ ja } e_1 \otimes e_1,$$

ovat asteen 1 tensoreita, mutta yhdistelemällä termejä huomataan, että myös

$$e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 = (e_0 + e_1) \otimes (e_0 + e_1)$$

on astetta yksi. Tarkastellaan vielä tensoria

$$t = e_0 \otimes e_0 + 2e_0 \otimes e_1 + 3e_1 \otimes e_1.$$

Yo. lausekkeessa on kolme tuloa, joten on selvää, että $\mathrm{rg}(t) \leq 3$, mutta yhdistelemällä termejä huomataan, että $\mathrm{rg}(t) \leq 2$:

$$t = e_0 \otimes (e_0 + 2e_1) + e_1 \otimes (3e_1).$$

Tuntuu uskottavalta, että tästä ei päästä eteenpäin, vaan pätee $\mathrm{rg}(t) = 2$. Jatkossa todistetaan tuloksia, jotka osoittavat, että näin todellakin on. Osoittautuu, että $\mathrm{rg}(t) = 2$, koska sekä tensoritulojen vasemmanpuolisista kerrottavista muodostettu joukko $\{e_0, e_1\}$ että vastaava oikeata puolta vastaava joukko $\{e_0 + 2e_1, 3e_1\}$ ovat vapaita.

2.3. Lemma. *Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia, $t \in U \otimes V$ ja $k = \mathrm{rg}(t)$. Tällöin jos $x_0, \dots, x_{k-1} \in U$ ja $y_0, \dots, y_{n-1} \in V$ ovat vektoreita, joille*

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i,$$

niin jonot $(x_0, \dots, x_{k-1})$ ja $(y_0, \dots, y_{k-1})$ ovat vapaita.

Todistus. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että jono $(x_0, \dots, x_{k-1})$ on vapaa. Oletetaan vastoin väitettä, että tämä jono on sidottu, ts. että on olemassa kertoimet $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$, joille $\sum_{i=0}^{k-1} a_i x_i = \bar{0}$, missä jokin kerroin ei ole nolla. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että tämä on a_{k-1}. Tällöin vektori x_{k-1} voidaan ratkaista yhtälöstä, ja sijoittamalla

$$x_{k-1} = (a_{k-1})^{-1} \sum_{i=0}^{k-2} (-a_i x_i) = \sum_{i=0}^{k-2} ((-a_i/a_{k-1}) x_i)$$

tensorin esitykseen saadaan

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i = \Big(\sum_{i=0}^{k-2} x_i \otimes y_i\Big) + x_{k-1} \otimes y_{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} x_i \otimes y_i + \Big(\sum_{i=0}^{k-2} ((-a_i/a_{k-1}) x_i)\Big) \otimes y_{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} x_i \otimes y_i + \sum_{i=0}^{k-2} x_i \otimes (-a_i/a_{k-1}) y_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-2} \big(x_i \otimes y_i + x_i \otimes (-a_i/a_{k-1}) y_{k-1}\big) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} x_i \otimes \big(y_i + (-a_i/a_{k-1}) y_{k-1}\big),
\end{aligned}$$

mikä tarkoittaa, että $\mathrm{rg}(t) \leq k - 1 < k$ vastoin oletusta. $\square$

2.4. Lemma. *Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia ja $t, t' \in U \otimes V$ tensoreita, jotka voidaan kirjoittaa muotoon*

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i \text{ ja } t' = \sum_{j=0}^{l-1} x'_j \otimes y'_j .$$

Oletetaan, että jonot $(y_0, \ldots, y_{k-1})$ ja $(y'_0, \ldots, y'_{l-1})$ ovat vapaita. Tällöin jos $\mathrm{sp}(\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}) \neq \mathrm{sp}(\{x'_0, \ldots, x'_{l-1}\})$, niin $t \neq t'$.

Todistus. Merkitään $W = \mathrm{sp}(\{x_0, \ldots, x_{k-1}\})$ ja $W' = \mathrm{sp}(\{x'_0, \ldots, x'_{l-1}\})$. Koska $W \neq W'$, niin $W \not\subseteq W'$ tai $W' \not\subseteq W$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $W' \not\subseteq W$, joten $x'_s \notin W$ jollakin $s \in \{0, \ldots, l-1\}$. Valitaan W:lle kanta E_0, jolloin E_0 ja $E_0 \cup \{x'_s\}$ ovat vapaita (osan I lauseen 4.4.b nojalla). Laajennetaan $E_0 \cup \{x'_s\}$ U:n kannaksi E ja merkitään x^*:llä sitä yksikäsitteistä lineaarista muotoa $x^*\colon U \to K$, jolle $x^*(x'_s) = 1$ ja $x^*(e) = 0$, kun $e \in E \setminus \{x'_s\}$. Huomataan, että $x^* \restriction W = \bar{0}_{W^*}$ on nollakuvaus, sillä $(x^* \restriction W) \restriction E_0 = x^* \restriction E_0$ on nollakuvaus. Edelleen on olemassa $y^* \in V^*$, jolle $y^*(y'_s) = 1$ ja $y^*(y'_j) = 0$, kun $j \in \{0, \ldots, l-1\} \setminus \{s\}$, sillä $\{y'_0, \ldots, y'_{l-1}\}$ on vapaa.

Kuvaus $h\colon U \times V \to K$, $h(x, y) = x^*(x)y^*(y)$ on bilineaarinen, joten on olemassa lineaarinen $A\colon U \otimes V \to K$, jolle $A(x \otimes y) = h(x, y)$, kun $x \in U$ ja $y \in V$. Kun tensorit t ja t' kuvataan kuvauksella A, saadaan

$$\begin{aligned} A(t) &= A\Big(\sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i\Big) = \sum_{i=0}^{k-1} A(x_i \otimes y_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} h(x_i, y_i) = \sum_{i=0}^{k-1} x^*(x_i)y^*(y_i) = \sum_{i=0}^{k-1} 0 \cdot y^*(y_i) = 0, \end{aligned}$$

sillä $x^* \restriction W = \bar{0}_{W^*}$, ja

$$\begin{aligned} A(t') &= A\Big(\sum_{j=0}^{l-1} x'_j \otimes y'_j\Big) = \sum_{j=0}^{l-1} A(x'_j \otimes y'_j) = \sum_{j=0}^{l-1} x^*(x'_j)y^*(y'_j) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} x^*(x'_j) \cdot \delta_{j,s} = x^*(x'_s) = 1. \end{aligned}$$

Siis $A(t) = 0 \neq 1 = A(t')$, joten $t \neq t'$. □

2.5. Lause. *Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia ja $t \in U \otimes V$. Tällöin $\mathrm{rg}(t) = k$, jos ja vain jos on olemassa U:n vapaa jono $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ ja V:n vapaa jono $(y_0, \ldots, y_{k-1})$, joille*

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i .$$

Todistus. Ehdon välttämättömyys seuraa suoraan tensorin asteen määritelmästä ja lemmasta 2.3. Oletetaan kääntäen, että on olemassa U:n vapaa jono $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ ja V:n vapaa jono $(y_0, \dots, y_{k-1})$, joille

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \otimes y_i .$$

Toisaalta määritelmän mukaan on olemassa U:n jono $(x'_0, \dots, x'_{l-1})$ ja V:n jono $(y'_0, \dots, y'_{l-1})$, joille myös

$$t = \sum_{i=0}^{l-1} x'_i \otimes y'_i ,$$

mutta lisäksi $l = \mathrm{rg}(t)$. Lemmasta 2.3 seuraa, että tämänkin t:n esityksen jonot ovat vapaita. Merkitään $W = \mathrm{sp}(\{x_0, \dots, x_{k-1}\})$. Edellisen lemman perusteella on oltava myös $W = \mathrm{sp}(\{x'_0, \dots, x'_{l-1}\})$, mikä merkitsee, että joukot $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ ja $\{x'_0, \dots, x'_{l-1}\}$ ovat molemmat aliavaruuden W kantoja. Siis $k = \dim(W) = l$. $\square$

2.6. Esimerkki. Tensorin asteen mukaan muodostettu esitys tensorille ei suinkaan ole yksikäsitteinen.

a) Tarkastellaan nimittäin mitä tahansa vektoriavaruutta V, jolle pätee $\dim(V) \geq 3$. Dimensio-oletuksesta seuraa, että on olemassa vapaa kolmikko $\{u_0, u_1, u_2\}$. Tutkitaan tensoria

$$t = u_0 \otimes u_0 + u_0 \otimes u_1 + u_0 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_2 \in V \otimes V.$$

Ryhmittelemällä termejä havaitaan, että $\mathrm{rg}(t) = 3$:

$$t = u_0 \otimes (u_0 + u_1 + u_2) + u_1 \otimes (u_1 + u_2) + u_2 \otimes u_2,$$

missä tensoritulojen vasemmanpuoleisten kerrottavien joukko $\{u_0, u_1, u_2\}$ on oletuksen nojalla vapaa ja oikeanpuoleinen vastaava $\{u_0 + u_1 + u_2, u_1 + u_2, u_2\}$ on myös helppo todistaa vapaaksi kolmikoksi. Toisaalta yhtä hyvin todistelussa olisi voitu käyttää ryhmittelyä

$$t = u_0 + \otimes u_0 + (u_0 + u_1) \otimes u_1 + (u_0 + u_1 + u_2) \otimes u_2 .$$

b) $\mathbb{Z}_2$-vektoriavaruuden $U = {\mathbb{Z}_2}^3$ tensoritulossa itsensä kanssa voidaan muodostaa aivan toisenlainen esimerkki. Tarkastellaan tensoria

$$t = u_0 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 + v \otimes v,$$

missä $u_0 = e_0 + e_1$, $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_0 + e_2$ ja $v = e_0 + e_1 + e_2$ ja $\{e_0, e_1, e_2\}$ on U:n luonnollinen kanta. Koska kolmikot $\{u_0, u_1, v\}$ ja $\{u_1, u_2, v\}$ selvästi ovat virittäjistöjä ja $\dim(U) = 3$, niiden on oltava myös kantoja, joten ne ovat vapaita joukkoja. Siis

$\mathrm{rg}(t) = 3$. Kuitenkin tensorin t lausekkeen voi sieventää:

$$\begin{aligned}
t &= u_0 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 + v \otimes v \\
&= u_0 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 + (u_1 + e_0) \otimes (u_2 + e_1) \\
&= u_0 \otimes u_1 + (u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_2) + u_1 \otimes e_1 + e_0 \otimes u_2 + e_0 \otimes e_1 \\
&= (e_0 + e_1) \otimes (e_0 + e_1) + e_0 \otimes e_1 + u_1 \otimes e_1 + e_0 \otimes u_2 \\
&= (e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_1) + u_1 \otimes e_1 + e_0 \otimes u_2 \\
&= (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) + (e_1 + e_2) \otimes e_1 + e_0 \otimes (e_0 + e_2) \\
&= e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_2 \\
&= e_1 \otimes e_0 + e_2 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_2 \\
&= e_0 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_0 + e_2 \otimes e_1,
\end{aligned}$$

mistä myös voitaisiin päätellä, että $\mathrm{rg}(t) = 3$. Laskuissa on toistuvasti käytetty sitä faktaa, että $\mathbb{Z}_2$:n karakteristika on 0, joten mielivaltaisilla $x, y \in U$ pätee $x \otimes y + x \otimes y = x \otimes (y + y) = x \otimes ((1+1)y) = x \otimes \bar{0} = \bar{0}_{U \otimes U}$.

3. Ulkotulo

3.1. Määritelmä. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas sekä $L_0, \dots, L_{k-1}$ ja L, M R-moduleita.

a) Kuvaus $f \colon L_0 \times \dots \times L_{k-1} \to M$ on *R-multilineaarinen*, jos kaikilla $s \in \{0, \dots, k-1\}$, $x_i \in L_i$, kun $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $y_s \in L_s$ ja $a \in R$ pätee

$$f(x_0, \dots, x_{s-1}, ax_s, x_{s+1}, \dots, x_{k-1}) = af(x_0, \dots, x_{k-1})$$

ja

$$\begin{aligned}
f(x_0, \dots, x_{s-1}, x_s + y_s, x_{s+1}, \dots, x_{k-1}) =& f(x_0, \dots, x_{k-1}) \\
&+ f(x_0, \dots, x_{s-1}, y_s, x_{s+1}, \dots, x_{k-1}).
\end{aligned}$$

b) Multilineaarikuvaus $g \colon L^k \to M$ on *alternoiva*, jos $g(\boldsymbol{x}) = 0$ aina, kun jonossa $\boldsymbol{x} = (x_0, \dots, x_{k-1}) \in L^k$ esiintyy toistoa, ts. jos $x_i = x_j$ eri indekseillä $i, j \in \{0, \dots k-1\}$. Kuvaus g on *antisymmetrinen*, jos $g(\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x}')$ aina, kun jonon $\boldsymbol{x}' = (x'_0, \dots, x'_{k-1}) \in L^k$ saa jonosta $\boldsymbol{x} = (x_0, \dots, x_{k-1}) \in L^k$ vaihtamalla kaksi koordinaattia keskenään, ts. jos joillakin $s, t \in \{0, \dots, k-1\}$, $s \neq t$ pätee $x'_s = x_t$ ja $x'_t = x_s$, kun taas $x'_i = x_i$, kun $i \in \{0, \dots, k-1\} \setminus \{s, t\}$. Vastaavasti kuvaus g on *(täysin) symmetrinen*, jos $g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}')$ aina, kun jonon $\boldsymbol{x}' \in L^k$ saa jonosta $\boldsymbol{x} \in L^k$ vaihtamalla kaksi koordinaattia keskenään.

3.2. Lemma. *Olkoon $f \colon L^k \to M$ multilineaarinenkuvaus, missä modulien L ja M kerroinrengas on vaihdannainen. Tällöin:*

a) *Jos f on alternoiva, niin se on myös antisymmetrinen.*
b) *Jos kerroinrengas on kunta $(K, +, \cdot)$, jonka karakteristika ei ole kaksi, ja f on antisymmetrinen, niin f on alternoiva.*

Todistus. Tarkastellaan eri indeksejä $s, t \in \{0, \dots, k-1\}$. Kiinnitetään tarkastelun ajaksi $x_i \in L_i$, kun $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ja $i \neq s$, $i \neq t$, sekä merkitään $\tilde{f} \colon L \times L \to M$,

$$\tilde{f}(x_s, x_t) = f(x_0, \dots, x_{k-1}).$$

Koska f on multilineaarinen, $\tilde{f}$ on bilineaarinen.

a) Jos f on alternoiva, niin kaikilla $x_s \in L_s$ ja $x_t \in L_t$ pätee

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \tilde{f}(x_s + x_t, x_s + x_t) = \tilde{f}(x_s, x_s) + \tilde{f}(x_s, x_t) + \tilde{f}(x_t, x_s) + \tilde{f}(x_t, x_t) \\ &= \bar{0} + \tilde{f}(x_s, x_t) + \tilde{f}(x_t, x_s) + \bar{0} = \tilde{f}(x_s, x_t) + \tilde{f}(x_t, x_s),\end{aligned}$$

joten $\tilde{f}(x_s, x_t) = -\tilde{f}(x_t, x_s)$. Siis $\tilde{f}$ on antisymmetrinen, ja koska tämä pätee indekseistä s ja t sekä parametreistä x_i ($i \in \{0, \dots, k-1\} \setminus \{s, t\}$) riippumatta, myös f on.

b) Oletetaan, että f on antisymmetrinen ja modulien kerroinrengas onkin kunta, jonka karakteristika ei ole kaksi. Tällöin antisymmetrisyydestä seuraa jokaiselle $x \in L_s$

$$\tilde{f}(x, x) = -\tilde{f}(x, x) \Rightarrow 2\tilde{f}(x, x) = 0 \Rightarrow \tilde{f}(x, x) = 0.$$

Siis $\tilde{f}$ on alternoiva, mistä seuraa kuvauksen f alternoivuus. □

3.3. Esimerkki. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Tällöin k alkion tulo $f \colon K^k \to K$,

$$f(x_0, \dots, x_{k-1}) = \prod_{i=k-1}^{i=0} x_i$$

on yksinkertainen esimerkki multilineaarikuvauksesta. Multilineaarisuus seuraa nimittäin helposti osittelulaista ja tulon vaihdannaisuudesta. Tulon vaihdannaisuuden vuoksi f on myös symmetrinen.

Oletetaan sitten, että kunnan $(K, +, \cdot)$ karakteristika on kaksi. Tällöin kaikille $x \in K$ pätee $x + x = 0$, joten kuvauksen f symmetrisyydestä seuraa sen antisymmetrisyys: jos jonot $\boldsymbol{x} \in K^k$ ja $\boldsymbol{x}' \in K^k$ saadaan toisistaan vaihtamalla kahden koordinaatin paikat, niin $f(\boldsymbol{x}) = f(vx') = -f(\boldsymbol{x}')$. Kuvaus f ei kuitenkaan ole alternoiva, sillä kun $\boldsymbol{x} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ kpl}}$, niin $f(\boldsymbol{x}) = 1 \neq 0$, vaikka jonossa $\boldsymbol{x}$ on toistoa. Siis edellisen lemman kohta b ei päde ilman jotain oletuksia kerroinrenkaan rakenteesta.

Tensoritulo $L_0 \otimes \cdots \otimes L_{k-1}$ määritellään yleisessä tapauksessa vastaavasti kuin tapauksessa $k = 2$. Myös tensoritulojen universaalisuuslause yleistyy.

3.4. Lause. *Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ sekä olkoot $L_0, \ldots L_{k-1}$ ja M R-moduleita, missä kerroinrengas on vaihdannainen. Olkoon edelleen $f\colon L_0 \times \cdots \times L_{k-1} \to M$ R-multilineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-lineaarikuvaus $A\colon L_0 \otimes \cdots L_{k-1} \to M$, jolle $f = A \circ \otimes$.*

$$\begin{tikzcd} & L_0 \otimes \cdots \otimes L_{k-1} \arrow[dr, dashed, "A \text{ lin.}"] & \\ L_0 \times \cdots \times L_{k-1} \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[rr, "f \text{ multilin.}"'] & & P \end{tikzcd} \qquad \square$$

3.5. Määritelmä. *Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta, jonka karakteristika ei ole kaksi. Olkoon V K-vektoriavaruus ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Asetetaan $a\colon V^k \to \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{kpl}}$,*

$$a(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k-1)}),$$

missä S_k on joukon $\{0, \cdots, k-1\}$ permutaatioiden joukko ja $\varepsilon(\sigma)$ on permutaation σ etumerkki. Merkitään $a(x_0, \ldots, x_{k-1}) = x_0 \wedge \cdots \wedge x_{k-1}$ ja kutsutaan tätä vektorien $x_0, \ldots, x_{k-1}$ ulkotuloksi. Avaruuden V k:s ulkopotenssi on vastaavasti tensoritulon $V \otimes \cdots \otimes V$ aliavaruus

$$\bigwedge^k V = \operatorname{sp}(\{\, x_0 \wedge \cdots \wedge x_{k-1} \mid x_0, \ldots, x_{k-1} \in M \,\}).$$

Huomautus. Joissakin lähteissä ulkopotenssi määritellään tekijäavaruutena. Tällöin ulkopotenssiksi valitaan $V \otimes \cdots \otimes V/S$, missä S on sopiva tensoritulon aliavaruus, jonka voi osoittaa olevan tässä esitetyn ulkopotenssin komplementti. Lopputulos olisi siis joka tapauksessa isomorfinen tässä esitetyn kanssa.

3.6. Lause. *Edellisessä määritelmässä esiintyvä kuvaus $a\colon V^k \to \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{kpl}}$,*

$$a(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma (x_{\sigma(0)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k-1)}),$$

on (määritelmän oletuksin) alternoiva. $\square$

3.7. Lause. *(Ulkotulojen universaalisuusominaisuus) Olkoot U ja V K-vektoriavaruuksia, missä kerroinkunnan karakteristika ei ole kaksi, sekä $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin jokaista alternoivaa K-multilineaarikuvausta vastaa sellainen K-lineaarikuvaus $A\colon \bigwedge^k U \to V$, että kaikille $x_0, \ldots, x_{k-1} \in U$ pätee $f(x_0, \ldots, x_{k-1}) = A(x_0 \wedge \cdots \wedge x_{k-1})$.*

$$\begin{tikzcd} & \bigwedge^k U \arrow[dr, dashed, "A \text{ lin.}"] & \\ U^k \arrow[ur, "\wedge"] \arrow[rr, "f \text{ alt.}"'] & & V \end{tikzcd}$$

$\square$

3.8. Lause. *Olkoon V K-vektoriavaruus, missä* $\operatorname{char}(K,+,\cdot) \neq 2$, *$k \in \mathbb{Z}_+$ ja E V:n kanta. Tällöin ulkopotenssilla $\bigwedge^k V$ on kanta*

$$\{\, u_I \mid I \subseteq E, |I| = k \,\},$$

missä jokaisella $I \subseteq E$, $|I| = k$ tensori u_I on $u_I = x_0 \wedge \cdots \wedge x_{k-1}$ jollakin joukon I luettelolla $I = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$. □

3.9. Seuraus. *Jos* $\dim(V) = n$, *niin* $\dim(\bigwedge^k V) = \binom{n}{k}$. □

3.10. Määritelmä. Olkoon $A\colon V \to V$, K-lineaarikuvaus, missä $\operatorname{char}(K,+,\cdot) \neq 2$. Oletetaan lisäksi, että $n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_+$. Kuvauksen A *determinantti* on tällöin vakio $a \in K$, joka saadaan seuraavasti: Kuvaus $B\colon V^n \to \bigwedge^n V$,

$$B(x_0, \ldots, x_{k-1}) = A(x_0) \wedge \ldots \wedge A(x_{k-1})$$

on multilineaarinen ja alternoiva, joten ulkotulojen universaalisuusominaisuuden perusteella on olemassa kuvaus $D\colon \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$, jolle

$$A(x_0) \wedge \cdots \wedge A(x_{n-1}) = B(x_0, \ldots, x_{n-1}) = D(x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}).$$

Koska $\dim(\bigwedge^n V) = \binom{n}{n} = 1$, niin jollakin vakiolla $a \in K$ pätee $D(u) = au$, kun $u \in \bigwedge^n V \setminus \bar{0}$. Tämä vakio a on siis kuvauksen A determinantti $\det(A)$, ts. skalaari, jolle

$$A(x_0) \wedge \cdots \wedge A(X_{n-1}) = \det(A)(x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1})$$

kaikilla $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V$.