Joukko-oppi
Syksy 2023
Harjoitukset 8, 23.10.2023
Malliratkaisut
Tekijä: Jonne Saarinen

Tehtävä 1

a) Vastaoletus: $P(A) \subseteq A \rightarrow P(A) \preccurlyeq \mathrm{A}$ (injektioksi kuvaus $\mathrm{id}_{\mathrm{P(A)}}$) *
Cantorin lause: $\mathrm{A} \prec \mathrm{P(A)} \rightarrow A \approx P(A) \rightarrow A \preccurlyeq \mathrm{P(A)}$ **
Nyt kohdista * ja ** seuraa, että $A \approx P(A)$, mikä ristiriita (CSB-lause). □

b) Vastaoletus: $P(A) \subseteq A$

Olkoon $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{x} \notin \mathrm{x}\}$.
Nyt $\mathrm{B} \preccurlyeq \mathrm{A}$, joten $B \in P(A) \subseteq A$, eli $\mathrm{B} \in \mathrm{A}$.
Siis nyt $\mathrm{B} \in \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} \notin \mathrm{B}$, joka ristiriita. □

Tehtävä 2

Olkoon A ja B induktiivisia joukkoja.

Väite 1: $A \cup B$ on induktiivinen joukko.

Todistus: Koska A on induktiivinen joukko, niin $\emptyset \in A$, joten $\emptyset \in A \cup B$. (Induktiivisen joukon määritelmän ehto 1)
Olkoon $x \in A \cup B$. Nyt $x \in A \rightarrow x^+ \in A \rightarrow x^+ \in A \cup B$, tai
$x \in B \rightarrow x^+ \in B \rightarrow x^+ \in A \cup B$. (Induktiivisen joukon määritelmän ehto 2)
Siis $A \cup B$ on induktiivinen joukko.

Väite 2: $A \cap B$ on induktiivinen joukko.

Todistus: Koska A ja B ovat induktiivisia joukkoja, niin $\emptyset \in A$ ja $\emptyset \in B$, joten $\emptyset \in A \cap B$.
Olkoon $x \in A \cap B$.
Tällöin $x \in A \rightarrow x^+ \in A \; ja \; x \in B \rightarrow x^+ \in B$
$\rightarrow x^+ \in A \cap B$.
Siis $A \cap B$ on induktiivinen joukko. □

Tehtävä 3

Olkoon A joukko, $a \in A$ ja $f: A \times \omega \to A$.
Olkoon $g: A \times \omega \to A \times \omega$, missä $g(a', n) = (f(a', n), n^+)$.
Rekursiolause: On olemassa yksikäsitteinen kuvaus $h': \omega \to A \times \omega$ siten, että $h'(0) = (a, 0)$ ja jokaiselle $n \in \omega$ pätee: $h'(n^+) = g(h'(n))$. Olkoon $g': A \times \omega \to A$, $g'(a', n) = a'$.

$h = g' \circ h': \omega \to A$, jolle
$h(0) = a$,
Lisäksi helpolla induktiolla nähdään, että $h'(n) = (h(n), n)$, kun $n \in \omega$.
Edelleen jokaisella $n \in \omega$ pätee:
$(h(n^+), n^+) = h'(n^+) = g(h'(n)) = g(h(n), n) = (f(h(n)), n^+) \Rightarrow h(n^+) = f(h(n), n)$.

Yksikäsitteisyys todistetaan suoraviivaiseti induktiolla. □

Tehtävä 4

a) Väite: $m+n = 0$, joss. $m=n=0$.

Todistus: Jos $m=n=0$, niin $m+n = m+0 = m = 0$.
Jos $n \neq 0$, niin on olemassa sellainen k, että $n=k^+$. Nyt $m+n=m+k^+=(m+k)^+ \neq 0$.
Jos $n=0$, niin $m+n=m+0=m$. Nyt jos $m \neq 0$, niin selvästi $m+n \neq 0$.
Siis oltava $m=0=n$, jotta $m+n = 0$. □

b) Väite: $m \cdot n=0$, joss. $m=0$ tai $n=0$

Todistus: Jos $n=0$, niin $m \cdot n=m \cdot 0=0$ (Määritelmästä)
Jos $m=0$, niin $m \cdot n=0 \cdot n=0$ (Harj. 9 todistetaan vaihdannaisuus)
Jos $m \neq 0$ ja $n \neq 0$, niin on olemassa sellainen k, että $n=k^+$.
Tällöin $m \cdot n=m \cdot k^+=m \cdot k+m$. Nyt koska $m \neq 0$, niin a-kohdan nojalla $m \cdot k+m \neq 0$.
Siis oltava $m=0$ tai $n=0$, jotta $m \cdot n=0$. □

Tehtävä 5

a) Väite: $(0, 0) \notin \mathrm{ran}(S)$.

Todistus:
Vastaoletus: $(0, 0) \in \mathrm{ran}(S)$.
1. Jos $n=0$, niin $S(m, n)=(0, m+1)$.
Tällöin $m+1=0 \leftrightarrow m^+=0$, mikä on ristiriita, koska 0 ei ole minkään luvun seuraaja.
2. Jos $n\neq 0$, niin $(m+1, n-1)=(0,0)$
Tällöin $m+1=0 \leftrightarrow m^+=0$, mikä on ristiriita, koska 0 ei ole minkään luvun seuraaja.

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että $(0,0) \notin \mathrm{ran}(S)$. □

b) Väite: S on injektio.

Todistus:
Olkoon $S(m, n) = S(m', n')$.
1. $n=0$ ja oletetaan, että $n'\neq 0$.
Tällöin $(0, m+1)=(m+1, n-1)$
$0 = m+1$, mikä on ristiriita, joten $n'=0$.
Tällöin $(0, m+1)=(0, m'+1)$
$\rightarrow m+1 = m'+1$
$\leftrightarrow m^+=m'^+$
$\leftrightarrow m=m'$
2. Nyt $n\neq 0$ ja $n'\neq 0$, kuten kohdassa 1.
Tällöin $(m+1, n-1) = (m'+1, n'-1)$
$\leftrightarrow m+1=m'+1$ ja $n-1=n'-1$ Merkitään $k^+=n$ ja $k'^+=n'$
$\leftrightarrow m^+=m'^+$ ja $k=k'$
$\leftrightarrow m=m'$ ja $n=k^+=(k')^+=n'$

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että S on injektio. □

Tehtävä 6

Väite: Olkoon $A \neq 0$, $R \subseteq A \times A$, jolla pätee $\mathrm{ran}(R) = A$. Tällöin on olemassa funktio $f: \omega \to A$ siten, että $f(n^+)Rf(n)$ jokaisella $n \in \omega$.

Todistus: Tarkastellaan aluksi relaation R sijaan relaatiota R^{-1}, jolle pätee $\mathrm{dom}(R^{-1}) = A$.
Tällöin on olemassa funktio $g: \mathrm{dom}(R^{-1}) \to A$ (lause 3.41) ja $g \subseteq R^{-1}$.
Rekursiolauseen nojalla on olemassa $f: \omega \to A$, joka on määritelty seuraavasti:

$$\begin{cases} f(0) = a, koska\ A \neq 0 \\ f(n^+) = g(f(n)) \end{cases}$$

Nyt, koska $f(n) \in A$, kaikilla $n \in \omega$, $f(n^+) = g(f(n))$ ja $g \subseteq R^{-1}$, niin $f(n)R^{-1}f(n^+)$.
Siis $f(n^+)Rf(n)$ jokaisella $n \in \omega$. □