7

Hyvät järjestykset

Jatkossa esitettävä kardinaalien ja ordinaalien teoria tukeutuu oleellisella tavalla valinta-aksioomaan. Yksi käyttökelpoisimmista valinta-aksiooman seurauksista on ns. hyvinjärjestysperiaate, jonka mukaan jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää eli varustaa lineaarijärjestyksellä, joka on hyvä. Aiemminhan valinta-aksioomaa käytettiin jo joukkojen mahtavuuksien vertailuun (lause 4.15) Tukeyn lemman kautta. Tässä yhteydessä Tukeyn lemman todistus jäi rästiin, mikä seikka korjataan tässä luvussa.

Suunnitelma on siis seuraava: Rakennetaan ensin transfiniittisen induktion ja rekursion teoriaa eli yleistetään luonnollisten lukujen käsittelystä tuttuja menetelmiä hyvinjärjestettyihin rakenteisiin. Todistetaan sitten valinta-aksioomasta hyvinjärjestysperiaate. Cantorin lähtökohtana oli, että hyvinjärjestysperiaate pätee, mutta sitä on vaikeampaa hyväksyä aksioomaksi kuin sitä valinta-aksiooman muotoa, joka tällä kurssilla on omaksuttu aksioomaksi. Zermelo omaksui valinta-aksiooman aksioomajärjestelmäänsä ja todisti sen avulla hyvinjärjestysperiaatteen. Todistus on jonkin verran työläs ja tekninen, ja siinä käytetyt ideat ennakoivat selvästi myöhemmin esitettävää transfiniittista induktiota. Hyvinjärjestysperiaatteesta puolestaan seuraa helposti Tukey lemma, kunhan on osoitettu, että äärelliset joukot ja Dedekind-äärelliset joukot ovat samoja joukkoja.

Transfiniittinen induktio ja rekursio

Määritelmä 7.1. Jos $<$ on joukon A tiukka osittainen järjestys ja $t \in A$, niin joukko

$$\operatorname{seg}_< t = \{x \in A \mid x < t\}$$

on alkion t *määräämä alkupätkä*. Jos järjestys $<$ on yhteydestä selvä, alaindeksin voi jättää pois ja merkitä yksinkertaisemmin $\operatorname{seg} t = \operatorname{seg}_< t$.

Erityisesti jos $A = \omega$ ja $<$ on ω:n tavallinen järjestys, niin jokaisella $n \in \omega$ pätee

$$\operatorname{seg} n = \{m \in \omega \mid m < n\} = \{0, \dots, n-1\} = n.$$

Määritelmä 7.2. Olkoon $<$ joukon A osittainen järjestys. Joukkoa $B \subseteq A$ kutsutaan *$<$-induktiiviseksi*, jos kaikilla $t \in A$ pätee seuraava ehto: jos $\operatorname{seg} t \subseteq B$, niin $t \in B$.

Lause 7.3 (Transfiniittisen induktion periaate)**.** *Olkoon $<$ joukon A hyvä järjestys. Tällöin ainoa joukon A $<$-induktiivinen osajoukko on A itse.*

Todistus. Jos $B \subsetneq A$, niin $A \setminus B \neq \emptyset$, joten joukossa $A \setminus B$ on pienin alkio t. Nyt $t \notin B$, mutta $\operatorname{seg} t \subseteq B$. Siis B ei ole $<$-induktiivinen. □

Todistusta voidaan havainnollistaa seuraavasti: Olkoon t_0 joukon A pienin alkio. Nyt $\operatorname{seg} t_0 = \emptyset$, joten $\operatorname{seg} t_0 \subseteq B$. Siis $t_0 \in B$. Olkoon sitten t_1 joukon $A \setminus \{t_0\}$ pienin alkio. Nyt $\operatorname{seg} t_1 = \{t_0\}$, joten $\operatorname{seg} t_1 \subseteq B$. Siis $t_1 \in B$. Ja niin edelleen aina alkioon t_ω saakka, jolla taas pätee $\operatorname{seg} t_\omega \subseteq B$, ja siten $t_\omega \in B$. Tätä voidaan edelleen jatkaa niin kauan, kuin joukossa A on alkioita. Kun alkiot loppuvat, voidaan todeta, että $B = A$.

Lause 7.4. *Olkoon $<$ lineaarijärjestys joukossa A. Oletetaan, että A on ainoa $<$-induktiivinen A:n osajoukko. Tällöin $<$ on hyvinjärjestys.*

Todistus. Olkoon $C \subseteq A$. Osoitetaan, että joko joukossa C on pienin alkio, tai $C = \emptyset$. Tarkastellaan tätä varten C:n "tiukkojen alarajojen joukkoa"

$$B = \{t \in A \mid \forall x \in C(t < x)\}.$$

Huomaa, että $B \cap C = \emptyset$. Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen sen mukaan, onko B $<$-induktiivinen vai ei:

Tapaus 1: B ei ole $<$-induktiivinen. Siis on olemassa $t \in A$, jolla $\operatorname{seg} t \subseteq B$, mutta $t \notin B$. Osoitetaan, että tällöin t on joukon C pienin alkio. Koska $t \notin B$, on olemassa $x \in C$, jolla $x \leq t$. Toisaalta ei voi olla $x < t$, koska $\operatorname{seg} t \subseteq B$ ja $B \cap C = \emptyset$. Siis on oltava $x = t$, joten $t \in C$. Lopuksi vielä todetaan, että koska $\operatorname{seg} t \cap C = \emptyset$, joukossa C ei ole yhtään pienempää alkiota kuin t.

Tapaus 2: B on $<$-induktiivinen. Lauseen oletuksen perusteella tällöin pätee $B = A$, ja koska $B \cap C = \emptyset$, tästä seuraa, että $C = \emptyset$. □

Kun $<$ on joukon A hyvä järjestys ja B on joukko, merkitään kuvausten joukkoa järjestyksen $<$ määräämiltä alkusegmenteiltä joukkoon B seuraavasti:

$${}^{<A}B = \{f \mid f \text{ on funktio } \operatorname{seg} t \to B \text{ jollain } t \in A\}.$$

Transfiniittinen rekursiolause (heikko muotoilu). *Olkoot $<$ joukon A hyvä järjestys ja $f\colon {}^{<A}B \to B$ funktio. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen funktio $h\colon A \to B$, jolle pätee kaikilla $t \in A$ ehto*

$$h(t) = f(h \upharpoonright \operatorname{seg} t).$$

Todistus. Käytetään todistuksessa samanlaista ideaa kuin luonnollisten lukujen rekursiolauseessa, ts. osoitetaan, että kuvauksen h voi muodostaa pienistä paloista. Sanotaan, että funktio η on *hyväksyttävä*, jos $\operatorname{dom}(\eta) \subseteq A$, $\operatorname{ran}(\eta) \subseteq B$ ja kaikilla $t \in A$ pätee: Jos $t \in \operatorname{dom}(\eta)$, niin $\operatorname{seg} t \subseteq \operatorname{dom}(\eta)$ ja $\eta(t) = f(\eta \upharpoonright \operatorname{seg} t)$. Olkoon $\mathcal{H}$ kaikkien hyväksyttävien funktioiden joukko ja olkoon $h = \bigcup \mathcal{H}$

Todistetaan seuraavat asiat:

a) h on kuvaus,

b) h on hyväksyttävä,

c) $\operatorname{dom}(h) = A$,

d) h on yksikäsitteinen kuvaus, joka toteuttaa lauseen ehdon.

a) Osoitetaan transfiniittisella induktiolla alkion $a \in A$ suhteen, että jokaisella $a \in A$ on olemassa korkeintaan yksi $b \in B$, jolle $(a, b) \in h$.

Olkoon siis $a \in A$, ja oletetaan, että funktionaalisuusehto pätee h:lle kaikilla $x \in \mathrm{seg}(a)$. Jos $a \notin \mathrm{dom}(h)$, niin ei ole mitään todistettavaa. Olkoot siis $(a, b), (a, b') \in h$, jolloin on olemassa kuvaukset $\eta_0, \eta_1 \in \mathcal{H}$, joille $\eta_0(a) = b$ ja $\eta_1(a) = b'$. Koska η_0 ja η_1 ovat hyväksyttäviä, niin $\mathrm{seg}\, a \subseteq \mathrm{dom}(\eta_0)$, $\mathrm{seg}_a \subseteq \mathrm{dom}(\eta_1)$. Lisäksi $\eta_0, \eta_1 \subseteq h$, joten jokaisella $x \in \mathrm{seg}(a)$ pätee $(x, \eta_0(x)) \in \eta_0 \subseteq h$ ja $(x, \eta_1(x)) \in \eta_1 \subseteq h$. Siis $(x, \eta_0(x)), (x, \eta_1(x)) \in h$ ja kun induktio-oletuksen mukaan funktionaalisuusehto pätee kohdassa x, niin $\eta_0(x) = \eta_1(x)$. Kaikkiaan siis $\eta_0 \restriction \mathrm{seg}\, a = \eta_1 \restriction \mathrm{seg}\, a$, mistä kuvauksien η_0 ja η_1 hyväksyttävyyden nojalla seuraa

$$b = \eta_0(a) = f(\eta_0 \restriction \mathrm{seg}\, a) = f(\eta_1 \restriction \mathrm{seg}\, a) = \eta_1(a) = b'.$$

Siis funktionaalisuusehto pätee h:lle myös kohdassa a.

Induktioväite, eli että funktionaalisuusehto pätee kaikilla $a \in A$, osoittaa nyt, että h on kuvaus.

b) Osoitetaan, että $h = \bigcup \mathcal{H}$ on hyväksyttävä kuvaus: Olkoon $t \in \mathrm{dom}(h)$. Valitaan $\eta \in \mathcal{H}$, jolle $t \in \mathrm{dom}(\eta)$, jolloin kuvauksen η hyväksyttävyyden tähden myös $\mathrm{seg}\, t \subseteq \mathrm{dom}(\eta)$. Koska $\eta \subseteq h$ ja h on kuvaus, niin $\eta \restriction \mathrm{seg}\, t = h \restriction \mathrm{seg}\, t$. Koska η on hyväksyttävä, niin saadaan edelleen

$$h(t) = \eta(t) = f(\eta \restriction \mathrm{seg}\, t) = f(h \restriction \mathrm{seg}\, t).$$

Siis h on hyväksyttävä.

c) Väitteen $\mathrm{dom}(h) = A$ todistamiseksi osoitetaan transfiniittisellä induktiolla alkion $a \in A$ suhteen, että $a \in \mathrm{dom}(h)$. Oletetaan siis, että $\mathrm{seg}\, a \subseteq \mathrm{dom}(h)$. Selvästi kuvaus $\eta = h \restriction \mathrm{seg}\, a$ on hyväksyttävä. Tarkastellaan nyt kuvausta $\eta' = \eta \cup \{(a, f(\eta \restriction \mathrm{seg}\, a))\}$. Kuvaus η' on myös hyväksyttävä: Jos nimittäin $t \in \mathrm{dom}(\eta') = \mathrm{dom}(\eta) \cup \{a\} = \mathrm{seg}(a) \cup \{a\}$, niin joko $t \in \mathrm{seg}(a)$ tai $t = a$. Edellisessä tapauksessa

$$\eta'(t) = \eta(t) = h(t) = f(h \restriction \mathrm{seg}(t)) = f(\eta' \restriction \mathrm{seg}(t)),$$

jälkimmäisessä tapauksessa suoraan kuvauksen η' määritelmän nojalla

$$\eta'(a) = f(\eta \restriction \mathrm{seg}\, a) = f(\eta' \restriction \mathrm{seg}\, a).$$

Siis $\eta' \in \mathcal{H}$, mistä seuraa $\eta' \subseteq h$ ja $a \in \mathrm{dom}(h)$.

d) Kohtien a–c nojalla h toteuttaa lauseen ehdon. Oletetaan, että h_0 ja h_1 molemmat toteuttaisivat lauseen ehdot. Koska ne ovat siis hyväksyttäviä eli $h_0, h_1 \in \mathcal{H}$, niin $h_0 \cup h_1 \subseteq \bigcup \mathcal{H} = h$. Jos h_0 ja h_1 olisivat eri kuvauksia $\omega \to A$, niin $h_0 \cup h_1$ ei olisi kuvaus, mistä seuraisi, ettei myöskään h olisi kuvaus, mikä on vastoin kohtaa b. Siis $h_0 = h_1 (= h)$. □

Määritelmä 7.5. Rakenteen (A, R) *suhteellistumalla* joukkoon $B \subseteq A$ tarkoitetaan rakennetta (B, S), missä $S = R \cap (B \times B)$. Suhteellistumaa merkitään $(B, S) = (A, R)|B$.

Lause 7.6. *Olkoot* $(A, <_A)$ *ja* $(B, <_B)$ *hyvinjärjestettyjä joukkoja. Tällöin jokin seuraavista toteutuu:*

1) $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.

2) On olemassa $t \in A$, jolle $(A, <_A)|\operatorname{seg}_{<_A} t \cong (B, <_B)$.

3) On olemassa $s \in B$, jolle $(A, <_A) \cong (B, <_B)|\operatorname{seg}_{<_B} s$.

Todistus. Olkoon e alkio, joka ei kuulu joukkoon B. Määritellään transfiniitisella rekursiolla funktio $F : A \to B \cup \{e\}$:

$$F(t) = \begin{cases} \min(B \setminus F[\operatorname{seg} t]), & \text{jos } B \setminus F[\operatorname{seg} t] \neq \emptyset \\ e, & \text{jos } B \setminus F[\operatorname{seg} t] = \emptyset \end{cases}$$

Nyt on kolme eri tapausta:

Huomautus (Tapaus 1)**.** $e \in \operatorname{ran}(F)$.
Olkoon $a \in A$ pienin alkio, jolla $F(a) = e$.
Väite: tällöin $F^\circ = F \restriction \operatorname{seg} a$ on isomorfismi $(\operatorname{seg} a, <_A^\circ) \to (B, <_B)$.
Selvästi $F^\circ : \operatorname{seg} a \to B$ on funktio ja F° on surjektio, sillä muuten olisi $B \setminus F^\circ[\operatorname{seg} a] \neq \emptyset$, jolloin $F(a) \in B$.
Edelleen

$$\begin{aligned} x \leq_A y <_A a \ &\Rightarrow \ F[\operatorname{seg} x] \subseteq F[\operatorname{seg} y] \\ &\Rightarrow \ B \setminus F[\operatorname{seg} y] \subseteq B \setminus F[\operatorname{seg} x] \\ &\Rightarrow \ F(x) \leq_B F(y). \end{aligned}$$

Jos $x <_A y <_A a$, niin $F(x) \neq F(y)$, koska $F(x) \in F[\operatorname{seg} y]$, mutta $F(y) \neq \ F[\operatorname{seg} y]$. Siis $F(x) <_B F(y)$.
Kääntäen, jos $x, y <_A a$ ja $F(x) < F(y)$, niin $F(y) \nleq_B F(x)$, joten $y \nleq_A x$ eli $x <_A y$.
Todetaan vielä, että F° on injektio: jos $x, y <_A a$ ja $x \neq y$, on joko $x <_A y$ tai $y <_A x$. Edellisessä tapauksessa $F(x) <_B F(y)$ ja jälkimmäisessä tapauksessa $F(y) <_B F(x)$; joka tapauksessa $F(x) \neq F(y)$.
Siispä F° on isomorfismi $(\operatorname{seg} a, <_A^\circ) \cong (B, <_B)$.

Huomautus (Tapaus 2)**.** $\operatorname{ran}(F) = B$.
Tällöin samaan tapaan kuin edellä nähdään, että F on isomorfismi $(A, <_A) \cong (B, <_B$
$)$.

Huomautus (Tapaus 3)**.** $\operatorname{ran}(F) \subsetneq B$.
Tällöin on olemassa $b \in B$ s.e. $\operatorname{ran}(F) = \operatorname{seg} b$ ja F on isomorfismi $(A, <_A) \cong (\operatorname{seg} b, <_B^\circ)$.

□

Hyvinjärjestysperiaate

Rakennetaan ensin toimiva käsitteistö hyvinjärjestysperiaatteen todistamiseksi.

Määritelmä 7.7. Kun A on joukko, niin joukon A *valintakuvauksella* tarkoitetaan mitä tahansa kuvausta $g \colon \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\} \to A$, jolle pätee jokaisella $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ ehto $g(B) \in B$.

Jokaisella joukolla A on olemassa valinta-aksiooman nojalla valintakuvaus, nimittäin kuvauksen $\mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)\smallsetminus\{\emptyset\}}$ valintakuvaus.

Hyvinjärjestysperiaatteen todistus rakentuu seuraavasti: Ideana on muodostaa joukkoon A järjestys joukon A valintakuvauksen g avulla niin, että pienimmäksi alkioksi valitaan $a = g(A)$, sitten $b = g(A \smallsetminus \{a\})$, ja aina uusia alkioita niin, että kun joukon B alkiot on valittu, niin seuraavaksi pienimmäksi alkioksi valitaan $g(A \smallsetminus B)$. Koska ideaan kuuluu, että alkiot valitaan järjestyksessä, niin alkiosta t tulee joukon B komplementin pienin alkio ja B:n alkiot ovat pienempiä kuin t; itse asiassa $B = \operatorname{seg} t$. Siis muodostettavan hyvän järjestyksen $<$ tulisi jokaisella $t \in A$ täyttää ehto

$$t = g(A \smallsetminus \operatorname{seg} t).$$

Tämä on kuitenkin vain ehto eikä relaation $<$ määritelmä. Osoittautuu kuitenkin, että ehdon voi toteuttaa ja se määrää hyvän järjestyksen $<$ yksikäsitteisesti.

Idea johtaa seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 7.8. Olkoon $g\colon \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\} \to A$ joukon A valintakuvaus ja $\lhd$ lineaarijärjestys, jolle $\operatorname{fld}(\lhd) \subseteq A$. Lineaarijärjestyksen $\lhd$ sanotaan *noudattavan* valintakuvausta g, jos jokaisella $t \in \operatorname{fld}(\lhd)$ pätee $t = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_\lhd t)$.

Määritelmä 7.9. Olkoot $\lhd$ ja $\lhd'$ tiukkoja osittaisia järjestyksiä. Merkitään $B = \operatorname{fld}(\lhd)$ ja $B' = \operatorname{fld}(\lhd')$. Tällöin $(B, \lhd)$ on tiukasti osittaisesti järjestetyn joukon $(B', \lhd')$ *loppulaajennus*, jos $(B', \lhd') = (B, \lhd)|\operatorname{seg}_\lhd t$ jollakin $t \in B$.

Apulause 7.10. *Olkoot $\lhd$ ja $\lhd'$ hyviä järjestyksiä, jotka noudattavat joukon A valintakuvausta $g\colon \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\} \to A$. Merkitään $B = \operatorname{fld}(\lhd)$ ja $B' = \operatorname{fld}(\lhd')$. Tällöin täsmälleen yksi seuraavista pätee: $(B, \lhd) = (B', \lhd')$, $(B, \lhd)$ on $(B', \lhd')$:n loppulaajennus tai $(B', \lhd')$ on $(B, \lhd)$:n loppulaajennus.*

Todistus. Lauseen 7.6 perusteella

$$\begin{aligned}
&(B, \lhd) \cong (B', \lhd') \\
&\text{tai jollakin } t' \in B' \text{ pätee } (B, \lhd) \cong (B', \lhd')|\operatorname{seg}_{\lhd'} t' \\
&\text{tai jollakin } t \in B \text{ pätee } (B, \lhd)|\operatorname{seg}_\lhd t \cong (B', \lhd').
\end{aligned}$$

Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että jompikumpi kahdesta ensimmäisestä vaihtoehdosta toteutuu. Valitaan isomorfismi ι, jolle joko $\iota\colon (B, \lhd) \cong (B', \lhd')$ tai $\iota\colon (B, \lhd) \cong (B', \lhd')|\operatorname{seg}_{\lhd'} t'$ jollakin $t' \in B'$. Koska ι on isomorfismi (ja jälkimmäisessä tapauksessa $\operatorname{seg}_{\lhd'} t'$ on alkupätkä), niin jokaisella $t \in B$ pätee $\operatorname{seg}_{\lhd'} \iota(t) = \iota[\operatorname{seg}_\lhd t]$. Osoitetaan transfiniittisellä induktiolla alkion $t \in B$ suhteen, että $\iota(t) = t$. Jos nimittäin induktio-oletus pätee kaikille $b \in \operatorname{seg}_\lhd t$ eli $\iota \restriction \operatorname{seg}_\lhd t = \mathrm{id}_{\operatorname{seg}_\lhd t}$, niin

$$\iota(t) = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_{\lhd'} \iota(t)) = g(A \smallsetminus \iota[\operatorname{seg}_\lhd t]) = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_\lhd t) = t,$$

sillä $\lhd, \lhd' \in \mathcal{W}$. Transfiniittinen induktio menee siis läpi, mistä seuraa $\iota = \mathrm{id}_B$. Tästä seuraa edelleen, että joko $(B, \lhd) = (B', \lhd')$ tai jollakin $s \in B'$ pätee $\mathrm{id}_B\colon (B, \lhd) \cong (B', \lhd')|\operatorname{seg}_{\lhd'} s$. Edellisessä tapauksessa $\lhd = \lhd'$, jälkimmäisessä $\lhd \subseteq \lhd'$ ja lisäksi $B = \operatorname{seg}_{\lhd'} s$ jollakin $s \in B'$. $\square$

Apulause 7.11. *Olkoon $\mathcal{W}$ perhe hyviä järjestyksiä. Oletetaan, että kaikilla eri järjestyksillä $\lhd, \lhd' \in \mathcal{W}$ joko $(B, \lhd)$ on $(B', \lhd')$:n loppulaajennus tai joko $(B', \lhd')$ on $(B, \lhd)$:n loppulaajennus, missä $B = \operatorname{fld}(\lhd)$ ja $B' = \operatorname{fld}(\lhd')$. Tällöin $\bigcup \mathcal{W}$ on hyvä järjestys.*

Todistus. Merkitään $< \, = \bigcup \mathcal{W}$. Oletuksesta seuraa ensinnäkin, että $\mathcal{W}$ on ketju tiukkoja lineaarijärjestyksiä, jolloin $<$ on yhteensopivien tiukkojen lineaarijärjestysten yhdisteenä tiukka lineaarijärjestys lauseen 5.30 nojalla.

Osoitetaan, että jos $S \subseteq \operatorname{fld}(<)$ on epätyhjä, niin joukossa S on $<$-pienin alkio. Valitaan nimittäin $s_0 \in \operatorname{fld}(<)$, jolloin on olemassa alkio x, jolle $x < s_0$ tai $s_0 < x$. Koska $< \, = \bigcup \mathcal{W}$, niin jollain $\lhd \in \mathcal{W}$ pätee siis $x \lhd s_0$ tai $s_0 \lhd x$, mistä seuraa $s_0 \in \operatorname{fld}(\lhd)$. Merkitään $s = \min_{\lhd}(S \cap \operatorname{fld}(\lhd))$, joka on olemassa, sillä $\lhd$ on hyvä järjestys. Osoitetaan, että s on myös $<$-pienin joukon S alkio. Olkoon $x \in S$. Jos $x \in \operatorname{fld}(\lhd)$, niin $s \trianglelefteq x$ alkion s määritelmän nojalla, joten myös $s \leq x$. Oletaan siis, että $x \notin \operatorname{fld}(\lhd)$. Merkitään $B = \operatorname{fld}(\lhd)$ ja $B' = \operatorname{fld}(\lhd')$. Valitaan $\lhd' \in \mathcal{W}$, jolle $x \in \operatorname{fld}(\lhd')$. Selvästi $\lhd \neq hyj'$ ja $(B, \lhd)$ ei ole $(B', \lhd')$:n loppulaajennus, joten edellisen lemman mukaan $(B', \lhd)$ ei ole $(B, \lhd')$:n loppulaajennus. Valitaan $t' \in B'$, jolle $(B, \lhd) = (B', \lhd') | \operatorname{seg}_{\lhd'} t'$. Tällöin $s \lhd t' \trianglelefteq' x$, mistä seuraa $s \lhd' x$ ja $s < x$. Siis $s = \min_<(S)$. On osoitettu, että järjestys $<$ on hyvä. □

Hyvinjärjestysperiaate (HP). *Jokainen joukko A voidaan hyvinjärjestää, ts. on olemassa joukon A hyvä järjestys.*

Todistus. Väite on triviaalisti totta, jos A on tyhjä joukko tai yksiö. Oletetaan siis jatkossa, että $|A| \geq 2$. Kiinnitetään joukon A valintakuvaus $g \colon \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\} \to A$ ja merkitään $\mathcal{W}$:llä niiden hyvien järjestysten $\lhd$ joukkoa, jotka noudattavat valintakuvausta g. Tietenkin $\emptyset \in \mathcal{W}$, joten $\mathcal{W} \neq \emptyset$. Kahdesta edellisestä lemmasta seuraa, että $< \, = \bigcup \mathcal{W}$ on hyvä järjestys. On varsin helppoa myös tarkastaa, että $<$ noudattaa valintakuvausta g. Siis $< \, \in \mathcal{W}$, joten $<$ on laajin hyvä järjestys, joka kuuluu joukkoon $\mathcal{W}$.

Osoitetaan vielä, että $\operatorname{fld}(<) = A$. Merkitään $B = \operatorname{fld}(<)$, ja oletetaan vastoin väitettä, että $B \neq A$. Asetetaan $a = g(A \smallsetminus B)$ ja

$$<' = (<) \cup \{(x, a) \mid x \in B\}.$$

Selvästi $<'$ on hyvä järjestys. Kun $x \in B$, niin $\operatorname{seg}_{<'} x = \operatorname{seg}_< x$, joten koska $<$ noudattaa g:tä, niin

$$x = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_< x) = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_{<'} x).$$

Lisäksi $a = g(A \smallsetminus B) = g(A \smallsetminus \operatorname{seg}_{<'})$, joten $<'$ noudattaa myös g:tä. Siten $<' \in \mathcal{W}$, mikä on ristiriidassa järjestyksen $<$ määritelmän kanssa. □

Huomautus. Valinta-aksioomaa ei tarvita, kun tehdään valintafunktio ω:lle. Voidaan määritellä

$$F(A) = \text{"A:n pienin alkio"}, \text{ kun } A \subseteq \omega, A \neq \emptyset.$$

Valinta-aksioomaa ei myöskään tarvita, kun valitaan alkioita äärellisestä joukosta.

Esimerkki 7.12. Jos on olemassa surjektio $f \colon B \to A$, niin valinta-aksiooman perusteella on olemassa funktio $g \subseteq f^{-1}$ s.e. $\operatorname{dom}(g) = A$. Tällöin g on injektio $A \to B$ (ks. lause 3.39), joten $A \preccurlyeq B$. Toisaalta jos $A \preccurlyeq B$ ja $A \neq \emptyset$, niin on olemassa injektio $f \colon A \to B$. Tällöin $f^{-1} \cup (B \setminus \operatorname{ran}(f)) \times \{a\})$, missä $a \in \{A\}$, on surjektio $B \to A$. (Jos $A = \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$, niin ei ole olemassa surjektiota $B \to A$.)

Siis

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \big(A = \emptyset \text{ tai on olemassa surjektio } f \colon B \to A\big).$$

Äärellisyys ja Dedekind-äärellisyys

Luvussa 6 todistettiin, että äärelliset joukot ovat Dedekind-äärellisiä, joten Dedekind-äärettömät joukot ovat äärettömiä. Sen osoittamiseen, että käänteisetkin implikaatiot ovat tosia, tarvitaan valinta-aksioomaa.

Lause 7.13. *Jos A on ääretön, niin $\omega \preccurlyeq A$.*

Todistus. Valinta-aksiooman nojalla joukolla A on valintakuvaus $f\colon \mathcal{P}(A) \smallsetminus \{\emptyset\} \to A$. Siis jokaisella $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, pätee $f(B) \in B$.

Määritellään rekursiolla funktio $h\colon \omega \to \mathcal{P}(A)$, missä $h(n) \subseteq A$ on äärellinen. Asetetaan

$$\begin{aligned} &h(0) = \emptyset \quad \text{ja} \\ &h(n^+) = h(n) \cup \{F(A \setminus h(n))\}, \end{aligned}$$

kun $n \in \omega$. Rekursiolauseen perusteella on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $h\colon \omega \to \mathcal{P}(A)$, jolla nämä ehdot pätevät.

Määritellään kuvaus $g\colon \omega \to A$ asettamalla $g(n) = F(A \setminus h(n))$. Nyt g on injektio, sillä jos $n, m \in \omega$ ja $n \neq m$, niin joko $m < n$ tai $n < m$. Oletetaan, että $m < n$. Tällöin $m^+ \leq n$ ja siis

$$g(m) \in h(m^+) \subseteq h(n)$$

Mutta $g(n) \notin h(n)$, sillä $g(n) = F(A \setminus h(n)) \in A \setminus h(n)$.

Siis $g(m) \neq g(n)$, joten g on injektio, mikä osoittaa väitteen $\omega \preccurlyeq A$. □

Huom. Edellisestä lauseesta seuraa, että jokainen ω:n ääretön osajoukko on yhtämahtava ω:n kanssa. Jos nimittäin $A \subseteq \omega$ on ääretön, niin sisältyvyyden vuoksi $A \preccurlyeq \omega$ ja edellisen lauseen nojalla $\omega \preccurlyeq A$, joten Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lauseesta seuraa $A \approx \omega$. Valinta-aksiooman käytön voi tässä tapauksessa välttää, sillä jokaisesta epätyhjästä luonnollisten lukujen joukosta voidaan aina valita pienin.

Seuraus 7.14. *Joukko A on ääretön, jos ja vain jos A on Dedekind-ääretön.*

Todistus. Aiemman tuloksen perusteella (seuraus 6.39) tiedetään jo, että Dedekind-äärettömät joukot ovat äärettömiä.

Oletetaan, että A ääretön. Edellisen lauseen perusteella on siis olemassa injektio $f\colon \omega \to A$. Asetetaan $g\colon A \to A$,

$$g(x) = \begin{cases} f(n^+), & \text{kun } x = f(n) \text{ jollakin } n \in \omega \\ x, & \text{kun } x \notin \operatorname{ran}(f). \end{cases}$$

Tällöin g on bijektio $A \to A \setminus \{f(0)\}$. □

Tukeyn ja Zornin lemmat

Hyvinjärjestysperiaatteen avulla Tukeyn lemma on varsin helppo todistaa. Todettakoon kuitenkin tätä ennen, että Dedekind-äärellisyys todettiin edellisessä alaluvussa samaksi kuin äärellisyys, siis ZFC:ssä, valinta-aksiooman ollessa voimassa. Siksi muotoiluja voidaan hieman yksinkertaistaa.

Määritelmä 7.15. Perhe $\mathcal{A}$ on *äärellisluonteinen*, jos kaikille joukoille A pätee seuraavaa: $A \in \mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun kaikille äärellisille $B \subseteq A$ pätee $B \in \mathcal{A}$.

Tietenkin perhe $\mathcal{A}$ on äärellisluonteinen, jos ja vain jos se on Dedekind-äärellisluonteinen

Tukeyn lemma (tavanomainen muotoilu)**.** Olkoon $\mathcal{A}$ äärellisluonteinen perhe ja $X \in \mathcal{A}$. Tällöin on olemassa maksimaalinen $M \in \mathcal{A}$, jolle $X \subseteq M$.

Todistus. Merkitään $A = \bigcup \mathcal{A}$. Hyvinjärjestysperiaatteen nojalla joukon A voi hyvinjärjestää; kiinnitetään siis joukon A hyvä järjestys $<$. Määritellään transfiniittisella rekursiolla kuvaus $h\colon A \to 2$,

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \{x \in \operatorname{seg}_< t \mid h(x) = 1\} \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Merkitään $M = h^{-1}[\{1\}]$. Transfiniittisella induktiolla voidaan osoittaa, että $M \in \mathcal{A}$. On vaivatonta myös nähdä, että M on maksimaalinen. □

Käydään läpi vielä Zornin lemma, joka on varsin yleisesti käytetty tapa soveltaa valinta-aksioomaa.

Määritelmä 7.16. Perheen $\mathcal{A}$ joukon M sanotaan olevan *maksimaalinen*, jos se on maksimaalinen sisältyvyyden suhteen eli maksimaalinen järjestetyssä joukossa $(\mathcal{A}, \subseteq)$, ts. kaikille $A \in \mathcal{A}$ pätee, että jos $M \subseteq A$, niin $M = A$. Perheen $\mathcal{A}$ osaperhe $\mathcal{K}$ on *ketju*, jos $(K, \subseteq)$ on lineaarijärjestetty joukko. $\mathcal{A}$ on *suljettu ketjujen yhdisteiden suhteen*, jos jokaiselle $\mathcal{A}$:n ketjulle $\mathcal{K}$ pätee $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{A}$.

Zornin lemma. Jokaisessa ketjujen yhdisteiden suhteen suljetussa perheessä on maksimaalinen alkio.

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ ketjujen yhdisteiden suhteen suljettu perhe. Muodostetaan uusi perhe

$$\mathbf{C} = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{C} \text{ on ketju}\}.$$

Tämä osoittautuu äärellisluonteiseksi: Olkoon $\mathcal{B}$ joukko.

1) Jos $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$, niin on olemassa $B \in \mathcal{B}$, jolle $B \notin \mathcal{A}$. Tällöin $\{B\} \nsubseteq \mathcal{A}$ on äärellinen $\mathcal{B}$:n osajoukko, jolle $\{B\} \notin \mathbf{C}$. Tietenkin myös $\mathbf{C} \notin \mathbf{C}$.

2) Jos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ei ole ketju, niin on olemassa vertaamattomat $B, B' \in \mathcal{B}$, ts. $B \nsubseteq B'$ ja $B' \nsubseteq B$. Tällöin $\{B, B'\} \subseteq \mathbf{C}$ on äärellinen perhe, joka ei ole ketju. Siis $\{B, B'\} \notin \mathbf{C}$ ja $\mathcal{B} \notin \mathbf{C}$.

3) Jos sen sijaan $\mathcal{B} \in \mathbf{C}$, niin $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ on ketju, jolloin sen kaikki äärelliset osaperheetkin ovat $\mathcal{A}$:han sisältyviä ketjuja ja siten $\mathbf{C}$:n alkioita.

Koska $\mathbf{C}$ on äärellisluonteinen, siinä on Tukeyn lemma nojalla maksimaalinen alkio $\mathcal{C}_{\max}$. Analysoidaan tätä perhettä.

Koska $\mathcal{C}_{\max} \in \mathbf{C}$, niin $\mathcal{C}_{\max} \subseteq \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}_{\max}$ on ketju. Koska $\mathcal{A}$ on ketjujen yhdisteiden suhteen suljettu, niin $M = \bigcup \mathcal{C}_{\max} \in \mathcal{A}$. Selvästi $\mathcal{C}_{\max} \cup \{M\} \subseteq \mathcal{A}$ on edelleen ketju ja siis $\mathcal{C}_{\max} \cup \{M\} \in \mathbf{C}$, mutta koska $\mathcal{C}_{\max}$ on $\mathbf{C}$:n maksimaalinen alkio, niin täytyy olla $M \in \mathcal{C}_{\max}$. Tästä seuraa, että M on ketjun $\mathcal{C}_{\max}$ suurin alkio sisältyvyyden suhteen.

Joukon M täytyy olla maksimaalinen myös $\mathcal{A}$:ssa, sillä jos olisi olemassa joukko $A \in \mathcal{A}$, jolle $M \subsetneq A$, niin $\mathcal{C}_{\text{max}} \cup A$ olisi $\mathcal{A}$:han sisältyvä ketju vastoin $\mathcal{C}_{\text{max}}$:n maksimaalisuutta $\mathbf{C}$:ssä. Siis M on etsitty $\mathcal{A}$:n maksimaalinen joukko. $\square$