8

Kardinaaliluvut

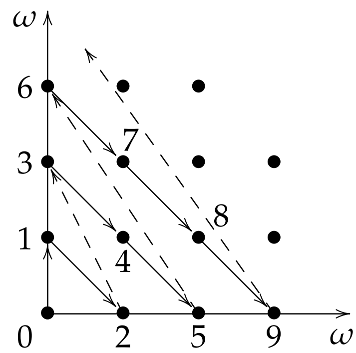
Täydentäviä huomioita yhtämahtavuudesta

Kun luonnollisten lukujen joukko ω on nyt tuttu, voidaan tehdä muutama uusi yhtämahtavuuteen liittyvä havainto.

Esimerkki 8.1. $\omega \times \omega \approx \omega$
Eräs bijektio $J\colon \omega \times \omega \to \omega$ on

$$J(m,n) = \frac{1}{2}\left((m+n)^2 + 3m + n\right).$$

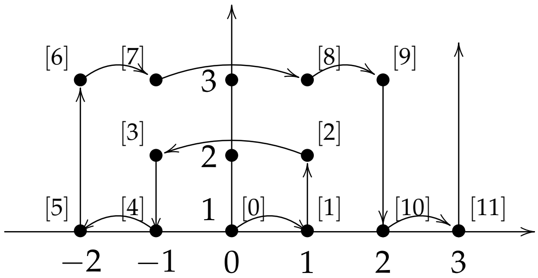
Se saadaan viereisestä kuviosta. (Huom: samalla tavalla nähdään, että $\omega^2 \approx \omega$.)



Esimerkki 8.2. $\omega \approx \mathbb{Q}$

Idea: Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ voidaan määritellä kaikkien osamäärien r/s joukkona, missä $r \in \mathbb{Z}$ ja $s \in \mathbb{Z}$, $s > 0$. Nämä osamäärät r/s voidaan puolestaan esittää järjestettyinä pareina (r,s) tason $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yläpuoliskossa; kukin rationaaliluku tosin esiintyy äärettömän monta kertaa, sillä $r/s = 2r/2s = 3r/3s = \cdots$. Käymällä läpi sopivassa järjestyksessä kaikki parit (r,s), ja jättämällä väliin saman rationaaliluvun toistot saadaan bijektio $\omega \to \mathbb{Q}$.

Sopiva bijektio saadaan esimerkiksi kuviosta:



Lause 8.3. (Cantor 1873) $\omega \not\approx \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $f\colon \omega \to \mathbb{R}$ funktio. Osoitetaan, että f ei ole surjektio.

Aloitetaan listaamalla reaalilukujen $f(0), f(1), f(2), \ldots$ desimaalikehitelmät:

$$\begin{array}{llllll} f(0) = & m_0, & \boxed{a_{0,0}} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \dots \\ f(1) = & m_1, & a_{1,0} & \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ f(2) = & m_2, & a_{2,0} & a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ f(3) = & m_3, & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & \boxed{a_{3,3}} \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{array}$$

Listassa m_i on $f(i)$:n kokonaisosa ($m_i \in \mathbb{Z}$) ja $a_{i,j}$ on $f(i)$:n $j+1$:s desimaali ($a_{i,j} \in \{0,1,2,\dots,9\}$).

Muodostetaan taulukon diagonaalin avulla uusi reaaliluku z:

$$z = 0,b_0b_1b_2\dots, \text{ missä } b_i = \begin{cases} 7, & \text{jos } a_{i,i} \neq 7 \\ 6, & \text{jos } a_{i,i} = 7 \end{cases}$$

Nyt $z \neq f(i)$, koska z:n $(i+1)$:s desimaali on eri kuin $f(i)$:n $(i+1)$:s desimaali: $b_i \neq a_{i,i}$. Siis $z \notin \operatorname{ran}(f)$, joten f ei ole surjektio. □

Nyt kun luonnolliset luvut on jo konstruoitu, voidaan esittää vaihtoehtoinen todistus Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lauseelle.

Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lauseen toinen todistus. Olkoot A ja B joukkoja ja $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to A$ injektioita. Tarkoitus on muodostaa näiden avulla bijektio $h\colon A \to B$.

Määritellään ensin rekursiolla joukot C_n, $n \in \omega$:

$$\begin{cases} C_0 = A \setminus \operatorname{ran}(g) \\ C_{n+} = g[f[C_n]]. \end{cases}$$

Nyt voidaan määritellä funktio $h\colon A \to B$ asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in \bigcup_{n\in\omega} C_n \\ g^{-1}(x), & \text{kun } x \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n. \end{cases}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että h on injektio. Oletetaan, että $x, x' \in A$ ja $x \neq x'$. Tällöin on neljä tapausta sen mukaan ovatko x ja x' joukossa $\bigcup_{n\in\omega} C_n$ vai eivät:

1) Jos $x, x' \in \bigcup_{n\in\omega} C_n$, niin $h(x) = f(x) \neq f(x') = h(x')$, sillä f on injektio.

2) Jos $x, x' \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n$, niin $h(x) = g^{-1}(x) \neq g^{-1}(x') = h(x')$, sillä g^{-1} on injektio.

3) Jos $x \in \bigcup_{n\in\omega} C_n$ ja $x' \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n$, niin $x \in C_m$, jollain $m \in \omega$, jolloin $h(x) = f(x) \in f[C_m]$. Toisaalta $h(x') = g^{-1}(x') \notin f[C_m]$, koska muuten olisi $x' \in g[f[C_m]] = C_{m+1}$.

4) Tapaus $x \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n$ ja $x' \in \bigcup_{n\in\omega} C_n$ menee samoin kuin edellinen.

Todistetaan lopuksi, että h on surjektio. Oletetaan, että $y \in B$. Jos $y = f(x)$ jollain $x \in \bigcup_{n\in\omega} C_n$, niin $y = h(x)$, joten $y \in \operatorname{ran}(h)$. Oletetaan sitten, että tällaista x ei ole olemassa. Todistetaan induktiolla, että tällöin $g(y) \notin C_n$ kaikilla $n \in \omega$. Olkoon siis $T = \{n \in \omega \mid g(y) \notin C_n\}$.

1) Ensinnäkin $g(y) \notin C_0 = A \setminus \operatorname{ran}(g)$, joten $0 \in T$.

2) Oletetaan sitten, että $n \in T$. Koska $y \notin f[C_n]$, pätee myös $g(y) \notin C_{n^+} = g[f[C_n]]$.

Siis $g(y) \in A \setminus \bigcup_{n\in\omega} C_n$, joten $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$, josta nähdään, että $y \in \operatorname{ran}(h)$. □

Kardinaalit

Samalla tavoin kuin luonnolliset luvut edustavat äärellisten joukkojen mahtavuuksia, kardinaalien on tarkoitus edustaa yleisesti joukkojen mahtavuuksia. Kardinaalien teorian perustulokset ovat kohtuullisen helppoja. Teorian esittämisen tiellä on vain yksi, mutta perustavanlaatuinen este: itse käsitteen "kardinaali" määritteleminen on teknisesti haastavaa, ja vaatii ensin ordinaalien määrittelemistä. Ordinaalien teoria taas on selvästi vaativampaa kuin kardinaalien. Tästä syystä tässä esityksessä turvaudutaan varsin poikkeukselliseen esitystapaan: Kardinaalin määritelmä lykätään ordinaalilukuun, ja kardinaalien teoriaa käsitellään vain kardinaalien perusominaisuuksien pohjalta. Siksi tehdään seuraava kardinaalilupaus.

Kardinaalilupaus. Jokaiseen joukkoon A voidaan liittää toinen joukko $\mathrm{card}(A)$, joukon A *kardinaali* eli *mahtavuus* eli *koko*, niin, että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikille joukoille A ja B:

KL1) $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \iff A \approx B$

KL2) $\mathrm{card}(\mathrm{card}(A)) = \mathrm{card}(A)$.

Muotoa $\mathrm{card}(A)$ olevia joukkoja kutsutaan *kardinaaliluvuiksi* tai lyhyemmin *kardinaaleiksi*. Merkinnän $\mathrm{card}(A)$ tilalla käytetään usein lyhyempää merkintää $|A| = \mathrm{card}(A)$.

Muutama nopea huomio on paikallaan: Ensinnäkin kun yhdistetään kardinaalilupauksen kohdat, saadaan kaikille A tulos

$$\mathrm{card}(\mathrm{card}(A)) = \mathrm{card}(A) \Rightarrow \mathrm{card}(A) \approx A.$$

Lisäksi huomataan, että jos κ on kardinaali, niin kohdan 2 perusteella $\mathrm{card}(\kappa) = \kappa$ eli jokainen kardinaali on itsensä kardinaali.

Edelleen kardinaalilupaus edellyttää, että seuraavat tulokset ovat voimassa kaikille joukoille A, B ja C:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A) \Rightarrow A \approx A,\\
&A \approx B \Rightarrow \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \Rightarrow \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A) \Rightarrow B \approx A \text{ ja}\\
&A \approx B \approx C \Rightarrow \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C) \Rightarrow \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(C) \Rightarrow A \approx C.
\end{aligned}$$

Toisaalta nämä tunnistetaankin lauseen 4.4 tuloksiksi, joten havaittu edellytys on voimassa.

Koska aiemmin on havaittu, että jokaista äärellistä joukkoa A vastaa yksikäsitteinen $n \in \omega$, jolle $A \approx n$, vaikuttaa mahdolliselta täydentää kardinaalilupausta seuraavilla ehdoilla.

3) Jos $A \approx n$, niin $\mathrm{card}(A) = n$.

4) ω on kardinaali. Kuitenkin kun halutaan korostaa ω:n kardinaalimerkitystä, sitä merkitään yleensä symbolilla $\aleph_0$.

Ylläolevassa merkinnässä $\aleph$ on heprealaisen aakkoston alef. Muuten kardinaalilukuja merkitään tyypillisesti pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla kirjaimesta κ alkaen (aakkosjärjestyksessä), siis κ, λ, μ, ν jne.

Kun κ on kardinaali, merkitään

$$K_\kappa = \{X \mid \operatorname{card}(X) = \kappa\}.$$

K_κ on aito luokka, jos $\kappa \neq 0$. Kun $\kappa = 0$, $K_0 = \{\varnothing\}$.

Kardinaalin käsite olisi jokseenkin hyödytön, ellei olisi olemassa menetelmiä konkreettisten joukkojen mahtavuuksien laskemiseksi ja arvioimiseksi. Tällaisia menetelmiä onneksi on, ja kardinaaliluvuille voidaan määritellä aritmeettisen operaatiot, jotka liittyvät suoraan joukko-opillisiin perusoperaatioihin: yhdisteeseen, karteesiseen tuloon ja kuvausjoukkoihin.

Määritelmä 8.4. Kardinaalien *yhteenlasku* $\oplus$, *kertolasku* $\otimes$ ja *potenssiinkorotus* $\uparrow$ määritellään seuraavasti: Olkoot κ ja λ kardinaaleja. Tällöin

a) kardinaalien κ ja λ *summa* on $\kappa \oplus \lambda = \operatorname{card}\big((\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\big)$,

b) näiden *tulo* on $\kappa \otimes \lambda = \operatorname{card}(\kappa \times \lambda)$ ja

c) κ *korotettuna potenssiin* λ on $\kappa \uparrow \lambda = \operatorname{card}({}^{\lambda}\kappa)$.

Huom. a) Symbolit $\oplus$, $\otimes$ ja $\uparrow$ ovat väliaikaismerkintöjä, joiden tarkoitus on erottaa kardinaalien laskutoimitukset luonnollisten lukujen vastaavista. Myöhemmin osoitetaan, että luonnollisille luvuille nämä tuottavat saman lopputuloksen, joten mitään konfliktia merkintöjen välillä ei olekaan, ja väliaikaismerkinnöistä voidaan luopua.

b) Syy siihen, miksi summan määritelmässä käytetään joukkoja $\kappa \times \{0\}$ ja $\lambda \times \{1\}$ joukkojen κ ja λ sijasta, on, että ne ovat erillisiä joukkoja, joille kuitenkin pätee $\kappa \times \{0\} \approx \kappa$ ja $\lambda \times \{1\} \approx \lambda$. Sen sijaan joukoista κ ja λ ei ainakaan a priori tiedetä, ovatko ne erillisiä, ennen kuin kardinaalien määritelmä on käyty läpi. Itse asiassa myöhemmin osoittautuukin, että aina pätee $\kappa \subseteq \lambda$ tai $\lambda \subseteq \kappa$, joten erillisyys toteutuu ainoastaan, kun $\kappa = 0 = \varnothing$ tai $\lambda = 0 = \varnothing$.

Esimerkki 8.5.

1) $3 \oplus 2 = 5 = 3 + 2$, sillä

$$\begin{aligned} 3 \oplus 2 &= \operatorname{card}((3 \times \{0\}) \cup (2 \times \{1\})) \\ &= \operatorname{card}((\{0,1,2\} \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times \{1\})) \\ &= \operatorname{card}(\{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1)\}) = 5. \end{aligned}$$

Sen sijaan $\operatorname{card}(3 \cup 2) = \operatorname{card}(3) = 3 \neq 5$.

2) Kaikilla kardinaaliluvuilla κ pätee:

$$\kappa \oplus 0 = \kappa, \qquad \kappa \otimes 0 = 0 \quad \text{ja} \quad \kappa \otimes 1 = \kappa.$$

Summalle seuraa nimittäin määritelmästä suoraan

$$\begin{aligned}\kappa \oplus 0 &= \operatorname{card}((\kappa \times \{0\}) \cup (0 \times \{1\})) = \operatorname{card}((\kappa \times \{0\}) \cup (\emptyset \times \{1\})) \\ &= \operatorname{card}((\kappa \times \{0\}) \cup \emptyset) = \operatorname{card}(\kappa \times \{0\}) = \kappa,\end{aligned}$$

sillä $\kappa \times \{0\} \approx \kappa$. Tuloille saadaan $\kappa \otimes 0 = \operatorname{card}(\kappa \times 0) = \operatorname{card}(\kappa \times \emptyset) = \operatorname{card}(\emptyset) = 0$ ja $\kappa \otimes 1 = \operatorname{card}(\kappa \times 1) = \operatorname{card}(\kappa \times \{0\}) = \operatorname{card}(\kappa) = \kappa$, missä jälleen käytettiin havaintoa $\kappa \times \{0\} \approx \kappa$.

3) Jokaisella kardinaaliluvulla κ pätee myös

$$\begin{aligned}&\kappa \uparrow 0 = 1 \quad \text{ja} \\ &0 \uparrow \kappa = 0, \quad \text{kunhan } \kappa \neq 0.\end{aligned}$$

Nimittäin määritelmän mukaan $\kappa \uparrow 0 = \operatorname{card}({}^{0}\kappa) = \operatorname{card}({}^{\emptyset}\kappa) = \operatorname{card}(\{\emptyset\}) = 1$, sillä on olemassa täsmälleen yksi kuvaus $\emptyset \to \kappa$, nimittäin tyhjä kuvaus $\emptyset$. Sen sijaan ${}^{\kappa}\emptyset = \emptyset$, jos $\kappa \neq 0$ eli $\kappa \neq \emptyset$. Huomattakoon, että erityisesti $0 \uparrow 0 = 1$.

Kardinaalien laskutoimitukset ovat siinä mielessä kombinatorisia, että ne liittyvät tunnettuihin kombinatorisiin laskuperiaatteisiin: erillisen yhdisteen mahtavuus voidaan laskea summalla, karteesisen tulon tulolla, ja kuvausjoukon potenssiinkorotuksella.

Lause 8.6. *Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin:*

a) Jos A ja B ovat erillisiä, niin $|A \cup B| = |A| \oplus |B|$ (summaperiaate).

b) $|A \times B| = |A| \otimes |B|$ (tuloperiaate).

c) $|{}^{A}B| = |B| \uparrow |A|$.

Todistus. Merkitään $\kappa = |A|$ ja $\lambda = |B|$, ja sovelletaan lausetta 4.5.

a) Oletetaan, että $A \cap B = \emptyset$. Joukot $\kappa \times \{0\}$ ja $\lambda \times \{1\}$ ovat erillisiä, sillä jos $x \in \kappa \times \{0\}$ ja $y \in \lambda \times \{1\}$, niin joillakin $\alpha \in \kappa$ ja $\beta \in \lambda$ pätee $x = (\alpha, 0)$ ja $y = (\beta, 1)$, joten $x \neq y$. Koska $A \cap B = \emptyset$ ja $(\kappa \times \{0\}) \cap (\lambda \times \{1\}) = \emptyset$ sekä $A \approx \kappa \approx \kappa \times \{0\}$ ja $B \approx \lambda \approx \lambda \times \{1\}$, niin lauseen 4.5 kohdan a nojalla

$$A \cup B \approx (\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\}).$$

Kardinaalilupauksen mukaan saadaan lopuksi

$$|A \cup B| = \operatorname{card}\big((\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\big) = \kappa \oplus \lambda = |A| \oplus |B|.$$

b) Koska $A \approx \kappa$ ja $B \approx \lambda$, niin lauseen 4.5 kohdan b nojalla $A \times B \approx \kappa \times \lambda$ eli $|A \times B| = |\kappa \times \lambda| = \kappa \otimes \lambda = |A| \otimes |B|$.

c) Vastaavasti yhtämahtavuuksista $A \approx \kappa$ ja $B \approx \lambda$ seuraa lauseen 4.5 kohdan c nojalla ${}^{A}B \approx {}^{\kappa}\lambda$ eli $|{}^{A}B| = |{}^{\kappa}\lambda| = \lambda \uparrow \kappa = |B| \uparrow |A|$. □

Esimerkki 8.7.

1) Kaikilla $n \in \omega$ pätee:

$$\begin{aligned} n + \aleph_0 &= \aleph_0, \\ n \cdot \aleph_0 &= \aleph_0, \qquad \text{kun } n \neq 0. \\ \big(0 \cdot \aleph_0 &= \operatorname{card}(\emptyset \times \omega) = 0\big) \end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \qquad \big(\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\} \approx \omega\big) \\ \aleph_0 \cdot \aleph_0 &= \aleph_0. \qquad \big(\omega \times \omega \approx \omega\big) \end{aligned}$$

2) Koska $\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}2$, kaikilla joukoilla A pätee $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\operatorname{card}(A)}$. Erityisesti $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\omega)) = 2^{\aleph_0}$.

3) Cantorin lauseen 8.3 perusteella kaikilla kardinaaliluvuilla κ,

$$\kappa \neq 2^{\kappa} \qquad \big(\text{erityisesti } \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}\big).$$

4) Kaikilla kardinaaliluvuilla κ on voimassa

$$\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa \qquad \big(A \times \{0\} \cup A \times \{1\} = A \times 2 \approx 2 \times A\big).$$

Todistetaan seuraavaksi, että kardinaalilukujen laskutoimitukset toteuttavat suuren osan tavallisista laskusäännöistä.

Lause 8.8. *Kaikilla kardinaaleilla κ, λ ja μ on voimassa:*

1) $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$ ja $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$ (kardinaalien yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia),

2) $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$ ja $\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$ (kardinaalien yhteen- ja kertolasku ovat liitännäisiä),

3) $\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \oplus (\kappa \otimes \mu)$ (yhteen- ja kertolasku osittelevat),

4) $\kappa \uparrow (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \uparrow \lambda) \otimes (\kappa \uparrow \mu)$,

5) $(\kappa \otimes \lambda) \uparrow \mu = (\kappa \uparrow \mu) \otimes (\lambda \uparrow \mu)$ ja

6) $(\kappa \uparrow \lambda) \uparrow \mu = \kappa \uparrow (\lambda \otimes \mu)$.

Todistus. Edellisen lauseen soveltamiseksi valitaan erilliset K, L ja M, joille $\operatorname{card}(K) = \kappa$, $\operatorname{card}(L) = \lambda$ ja $\operatorname{card}(M) = \mu$.

1) Yhteenlaskulle saadaan edellisen lauseen kohdan a nojalla

$$\kappa \oplus \lambda = |K| \oplus |L| = |K \cup L| = |L \cup K| = |L| \oplus |K| = \lambda \oplus \kappa,$$

sillä $K \cap L = \emptyset$. Kertolaskun vaihdannaisuus seuraa siitä, että $K \times L \approx L \times K$ (kuvaus $(x, y) \mapsto (y, x)$ on helposti havaittavissa bijektioksi), ja siis

$$\kappa \otimes \lambda = |K| \otimes |L| = |K \times L| = |L \times K| = |L| \otimes |K| = \lambda \otimes \kappa.$$

2) Edellisen lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) &= |K| \oplus (|L| \oplus |M|) \\
&= |K| \oplus (|L \cup M|) && (L \cap M = \emptyset) \\
&= |K \cup (L \cup M|)| && (K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset) \\
&= |(K \cup L) \cup M| \\
&= |K \cup L| \oplus |M| && ((K \cup L) \cap M) = (K \cap M) \cup (L \cap M) = \emptyset) \\
&= (|K| \oplus |L|) \oplus |M| && K \cap L = \emptyset \\
&= (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu,
\end{aligned}$$

sillä K, L ja M ovat erillisiä. Koska kuvaus $f\colon (K \times L) \times M \to K \times (L \times M)$, $f((x,y),z) = (x,(y,z))$ on bijektio, niin $(K \times L) \times M \approx K \times (L \times M)$ ja edellisen lauseen avulla saadaan myös kertolaskun liitäntälaki:

$$\begin{aligned}
\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) &= |K| \otimes (|L| \otimes |M|) = |K| \otimes |L \times M| \\
&= |K \times (L \times M)| \\
&= |(K \times L) \times M| = |K \times L| \otimes |M| = (|K| \otimes |L|) \otimes |M| \\
&= (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu.
\end{aligned}$$

3) Koska $L \cap M$, niin myös $(K \times L) \cap (K \times M) = K \times (L \cap M) = K \times \emptyset = \emptyset$, joten

$$\begin{aligned}
\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) &= |K| \otimes (|L| \oplus |M|) = |K| \otimes |L \cup M| \\
&= |K \times (L \cup M)| \\
&= |(K \times L) \cup (K \times M)| \\
&= |K \times L| \oplus |K \times M| \\
&= (\kappa \otimes \lambda) \oplus (\kappa \otimes \mu).
\end{aligned}$$

4) Todistetaan ensin, että ${}^{L \cup M}K \approx {}^{L}K \times {}^{M}K$. Asetetaan $F\colon {}^{L \cup M}K \to {}^{L}K \times {}^{M}K$,

$$F(f) = (f \restriction L, f \restriction M)$$

ja $G\colon {}^{L}K \times {}^{M}K \to {}^{L \cup M}K$,

$$G(g,h) = g \cup h.$$

F ja G ovat hyvinmääriteltyjä kuvauksia: Jos nimittäin $f \in {}^{L \cup M}K$ eli $f\colon L \cup M \to K$, niin $f \restriction L$ on kuvaus $L \to K$ ja $f \restriction M$ kuvaus $M \to K$, joten $(f \restriction L, f \restriction M) \in {}^{L}K \times {}^{M}K$. Jos sen sijaan $(g,h) \in {}^{L}K \times {}^{M}K$ eli $g\colon L \to K$ ja $h\colon M \to K$, niin joukkojen L ja M erillisyydestä seuraa, että $g \cup h$ on kuvaus $L \cup M \to K$ eli $g \cup h \in {}^{L \cup M}K$.

Jokaisella $f \in {}^{L \cup M}K$ eli $f\colon L \cup M \to K$ pätee

$$(G \circ F)(f) = G(F(f)) = G(f \restriction L, f \restriction M) = (f \restriction L) \cup (f \restriction M) = f \restriction (L \cup M) = f,$$

joten $G \circ F = \mathrm{id}_{{}^{L \cup M}K}$. Kaikilla $(g,h) \in {}^{L}K \times {}^{M}K$ saadaan puolestaan

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(g,h) &= F(G(g,h)) = F(g \cup h) = ((g \cup h) \restriction L, (g \cup h) \restriction M) \\
&= (g \restriction L \cup h \restriction L, g \restriction M \cup h \restriction M) = (g \cup \emptyset, \emptyset \cup h) = (g,h),
\end{aligned}$$

sillä g on kuvaus $L \to K$, h kuvaus $M \to K$ ja $L \cup M = \emptyset$. Siis myös $F \circ G = \mathrm{id}_{{}^L K \times {}^M K}$.

Koska $G \circ F = \mathrm{id}_{{}^{L\cup M}K}$ ja $F \circ G = \mathrm{id}_{{}^L K \times {}^M K}$, niin F ja G ovat molemmat bijektioita ja toistensa käänteiskuvauksia. Siten ${}^{L\cup M}K \approx {}^L K \times {}^M K$, ja väitteen kohta 4 saadaan todistettua:

$$\begin{aligned}
\kappa \uparrow (\lambda \oplus \mu) &= |K| \uparrow (|L| \oplus |M|) \\
&= |K| \uparrow (|L \cup M|) && (L \cap M = \emptyset) \\
&= |{}^K L \cup M| \\
&= |{}^L K \times {}^M K| = |{}^L K| \otimes |{}^M K| \\
&= (|K| \uparrow |L|) \otimes (|K| \uparrow |M|) \\
&= (\kappa \uparrow \lambda) \otimes (\kappa \uparrow \mu).
\end{aligned}$$

5) Harjoitustehtäväksi jätetään sen todistaminen, että ${}^M(K \times L) \approx {}^M K \times {}^M L$. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
(\kappa \otimes \lambda) \uparrow \mu &= (|K| \otimes |L|) \uparrow |M| = (|K \times L|) \uparrow |M| \\
&= |{}^M K \times L| = |{}^M K \times {}^M L| \\
&= |{}^M K| \otimes |{}^M L| \\
&= (|K| \uparrow |M|) \otimes (|L| \uparrow |M|) \\
&= (\kappa \uparrow \mu) \otimes (\lambda \uparrow \mu).
\end{aligned}$$

6) Todistetaan aluksi, että ${}^M({}^L K) \approx {}^{L\times M}K$. Joukon ${}^M({}^L K)$ alkiot ovat funktioita $f\colon M \to {}^L K$, joten

$$\begin{aligned}
f(m) &\in {}^L K && \text{kullakin } m \in M \text{ ja} \\
(f(m))(l) &\in K && \text{kullakin } l \in L.
\end{aligned}$$

Joukon ${}^{L\times M}K$ alkiot ovat funktioita $g\colon L \times M \to K$, joten kun $(l, m) \in L \times M$, niin

$$g(l, m) \in K.$$

Määritellään funktio $H\colon {}^M({}^L K) \to {}^{(L\times M)}K$ asettamalla

$$H(f) = g \quad \text{jokaisella } f \in {}^M({}^L K),$$

missä $g \in {}^{(L\times M)}K$ on se funktio, jolla jokaisella $m \in M$ ja $l \in L$ pätee

$$g(l, m) = (f(m))(l).$$

Osoitetaan sitten, että H on bijektio.

H on injektio: Jos $f, f' \in {}^M({}^L K)$ ja $f \neq f'$, niin on olemassa $m \in M$ s.e. $f(m) \neq f'(m)$. Tällöin on olemassa myös $l \in L$ s.e. $(f(m))(l) \neq (f'(m))(l)$. Siis $H(f)(l, m) \neq H(f')(l, m)$ eli $H(f) \neq H(f')$.

H on surjektio: Jos $g \in {}^{(L\times M)}K$, niin $g = H(f)$, missä $f \in {}^{M}({}^{L}K)$ on funktio, jolla $(f(m))(l) = g(l,m)$ kaikilla $l \in L$ ja $m \in M$.

Lopuksi saadaan

$$\begin{aligned}(\kappa \uparrow \lambda) \uparrow \mu &= (|K| \uparrow |L|) \uparrow |M| \\ &= |{}^{L}K| \uparrow |M| = |{}^{M}({}^{L}K)| \\ &= |{}^{L\times M}K| = |K| \uparrow |L \times M| = |K| \uparrow (|L| \otimes |M|) \\ &= \kappa \uparrow (\lambda \otimes \mu).\end{aligned}$$

□

Luonnolliset luvut äärellisinä kardinaaleina

Luvussa 6 määriteltiin luonnollisten lukujen yhteenlasku, kertolasku ja eksponenttifunktio rekursiolla. Toisaalta edellä määriteltiin kardinaaliluvuille samat laskutoimitukset, jotka siis erityisesti koskevat myös luonnollisia lukuja. Luonnollisten lukujen kohdalla nämä osoittautuvat samoiksi.

Lause 8.9. *Kun $m, n \in \omega$, niin*

$$\begin{aligned} m+n &= m \oplus n, \\ m \cdot n &= m \oplus n \text{ ja} \\ m^n &= m \uparrow n. \end{aligned}$$

Todistus. Todetaan ensin, että kaikilla kardinaaleilla κ ja λ on voimassa seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} \kappa \oplus 0 = \kappa \\ \kappa \oplus (\lambda \oplus 1) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa \otimes 0 = 0 \\ \kappa \otimes (\lambda \oplus 1) = (\kappa \otimes \lambda) \oplus \kappa, \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa \uparrow 0 = 1 \\ \kappa \uparrow (\lambda \oplus 1) = (\kappa \uparrow \lambda) \otimes \kappa. \end{cases}$$

Ylempien yhtälöiden laskut on esitetty esimerkissä 8.5. Alemmat yhtälöt seuraavat lauseesta 8.8, nimittäin vasemmanpuoleisin yhteenlaskun liitäntälaista, keskimmäinen osittelulaista (kun huomataan myös esimerkin 8.5 tulos $\kappa \otimes 1 = \kappa$) ja oikeanpuoleisin potenssilaista (kohta 4) ja siitä, että $\kappa \uparrow 1 = \kappa$.

Lisäksi huomataan, että jokaisella $n \in \omega$ pätee $n^+ = \operatorname{card}(n^+) = \operatorname{card}(n \cup \{n\}) = n \oplus 1$. Siis ylläolevat tulokset voidaan kirjoittaa luvuille $m, n \in \omega$ muotoon

$$\begin{cases} m \oplus 0 = m \\ m \oplus n^+ = (m \oplus n)^+, \end{cases} \quad \begin{cases} m \otimes 0 = 0 \\ m \otimes n^+ = (m \otimes n) \oplus m, \end{cases} \quad \begin{cases} m \uparrow 0 = 1 \\ m \uparrow n^+ = (m \uparrow n) \otimes m. \end{cases}$$

Tämän jälkeen lauseen todistuksen päättää puhtaasti tekninen päättely. Kiinnitetään $m \in \omega$. Tällöin rekursiolauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen $f\colon \omega \to \omega$, jolle $f(0) = m$ ja $f(n^+) = f(n)$, kun $n \in \omega$. Yhteenlaskun määritelmän nojalla kuvaukselle f saadaan lauseke $f(n) = m + n$, kun $n \in \omega$, mutta yo. yhtälöiden nojalla myös kuvaus $g\colon \omega \to \omega$, $g(n) = m \oplus n$ täyttää rekursioehdot. Siis $f = g$, mistä saadaan jokaisella $n \in \omega$ yhtälö $m + n = f(n) = g(n) = m \oplus n$.

Kertolaskun kohdalla todistus etenee aivan samalla tavalla, mutta lisäksi tarvitaan tietoa, että luonnollisten lukujen yhteenlasku ja kardinaalien yhteenlasku luonnollisille luvuille yhtyvät. Kiinnitetään siis jälleen $m \in \omega$, ja tarkastellaan nyt kuvausta $f \in \omega \to \omega$, jolle $f(0) = 0$ ja $f(n^+) = f(n) + m$. Kertolaskun määritelmän mukaan $f(n) = m \cdot n$, mutta kuvaus $g\colon \omega \to \omega$, $g(n) = m \otimes n$ toteuttaa samat rekursioehdot, sillä $g(0) = m \otimes 0 = 0$ ja $g(n^+) = m \otimes n^+ = (m \otimes n) \oplus m = (m \otimes n) + m = g(n) + m$, kun $n \in \omega$. Siis rekursiolauseen nojalla $f = g$, mistä seuraa $m \cdot n = f(n) = g(n) = m \otimes n$, kun $n \in \omega$.

Potenssiinkorotuksen kohdalla todistus noudattaa täsmälleen samaa kaavaa. Tulos kertolaskulle tunnetaan jo, joten toinen rekursioyhtälöistä saadaan muotoon $m \uparrow n^+ = (m \uparrow n) \cdot m$. Siis luonnollisten lukujen potenssiinkorotus ja kardinaalien potenssiinkorotus ω:aa rajoitettuna toteuttavat samat rekursioyhtälöt, mistä seuraa $m^n = m \uparrow n$, kun $m, n \in \omega$. □

Seuraus 8.10. *Jos A ja B ovat äärellisiä, niin $A \cup B$, $A \times B$ ja ${}^B A$ ovat äärellisiä.*

Todistus. Olkoot $\operatorname{card}(A) = m$ ja $\operatorname{card}(B) = n$, missä $m, n \in \omega$. Tällöin $\operatorname{card}(A \times B) = m \otimes n = m \cdot n \in \omega$ ja $\operatorname{card}({}^B A) = m \uparrow n = m^n \in \omega$.

Yhdisteen kohdalla on syytä olla tarkempi, ja palauttaa ongelma ensin erilliseen yhdisteeseen: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, joten

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \cup (B \setminus A)) = m \oplus p = m + p \in \omega,$$

missä $p = \operatorname{card}(B \setminus A) \leq n$. □

Edellinen lause osoittaa, että tässä vaiheessa voidaan luopua väliaikaismerkinnöistä $\oplus$, $\otimes$ ja $\uparrow$ kardinaalien laskutoimituksille. Luonnollisten lukujen kohdalla voidaan siis käyttää tilanteen mukaan hyväksi sitä, että rekursiivinen määritelmä ja kombinatorinen määritelmä tuottavat saman lopputuloksen.

Kardinaalilukujen järjestys

Määritelmä 8.11. *Kardinaalien järjestys* $\leq$ määritellään seuraavasti: Olkoot κ ja λ kardinaaleja. Tällöin $\kappa \leq \lambda$, jos $\kappa \preccurlyeq \lambda$. *Kardinaalien tiukka järjestys* määritellään tavalliseen tapaan: $\kappa < \lambda$, jos $\kappa \leq \lambda$ ja $\kappa \neq \lambda$.

Kardinaalien järjestystä voidaan käyttää luonnollisella tavalla joukkojen mahtavuusvertailussa:

Apulause 8.12. *Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin*

1) *$A \preccurlyeq B$, jos ja vain jos* $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$.

2) *$A \prec B$, jos ja vain jos* $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$.

Todistus. Merkitään $\kappa = |A|$ ja $\lambda = |B|$. Tällöin $\kappa \approx A$ ja $\lambda \approx B$.

1) Jos $A \preccurlyeq B$, niin $\kappa \approx A \preccurlyeq B \approx \lambda$, joten $\kappa \preccurlyeq \lambda$ eli $\kappa \leq \lambda$. On ilmeistä, että tämän päättelyn voi kääntää.

2) Edellisen kohdan ja kardinaalilupauksen nojalla

$$A \prec B \iff A \preccurlyeq B \wedge A \not\approx B \iff \kappa \leq \lambda \wedge \kappa \neq \lambda \iff \kappa < \lambda.$$

□

Esimerkki 8.13.

1) Kaikilla kardinaaleilla κ on voimassa $0 \leq \kappa$, sillä triviaalisti $\varnothing \preccurlyeq \kappa$.

2) Kaikilla äärellisillä kardinaaleilla n pätee $n < \aleph_0$. Edelleen äärellisten kardinaalilukujen järjestys on sama kuin luonnollisten lukujen järjestys: kaikilla $m, n \in \omega$ pätee
$$m \leq n \iff m \trianglelefteq n,$$
missä kardinaalien vertailussa käytetään väliaikaisesti symbolia $\trianglelefteq$ symbolin $\leq$ asemesta. Jos nimittäin $m \leq n$, niin seurauksen 6.29 nojalla $m \subseteq n$, joten $m \preccurlyeq n$ eli $m \trianglelefteq n$. Jos taas $m \nleq n$, niin trikotomialauseen 6.27 mukaan $m > n$, joten seurauksen 6.29 nojalla $m \supsetneq n$. Koska m on lokeroperiaatteen nojalla Dedekind-äärellinen, niin tästä seuraa $m \not\approx n$ ja siis $m \succ n$. Siis $m \not\preccurlyeq n$ eli $m \ntrianglelefteq n$.

3) Jokaisella kardinaalilla κ on voimassa $\kappa < 2^\kappa$. Nimittäin Cantorin lauseen 8.3 nojalla $\kappa \neq 2^\kappa$. Toisaalta funktio $f\colon \kappa \to \mathcal{P}(\kappa)$, $f(x) = \{x\}$ on injektio, joten $\kappa \preccurlyeq \mathcal{P}(\kappa) \approx {}^\kappa 2$, joten $\kappa = |\kappa| \leq |{}^\kappa 2| = 2^\kappa$.

Esimerkki 8.14. Edellisen kohdan perusteella $\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}({}^\omega 2) = 2^{\aleph_0}$. Edelleen joukon $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mahtavuus voidaan laskea seuraavasti:
$$\operatorname{card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Seuraavaksi halutaan osoittaa, että $\leq$ järjestää lineaarisesti kardinaalien luokan. Tulos seuraa helposti siitä, mitä luvussa 4 on esitetty.

Lause 8.15. *Kaikilla kardinaaleilla κ, λ ja μ on voimassa*

1) $\kappa \leq \kappa$ *(refleksiivisyys),*

2) $\kappa \leq \lambda \wedge \lambda \leq \mu \Rightarrow \kappa \leq \mu$ *(transitiivisuus),*

3) $\kappa \leq \lambda \wedge \lambda \leq \kappa \Rightarrow \kappa = \lambda$ *(antisymmetrisyys),*

4) joko $\kappa \leq \lambda$ *tai* $\lambda \leq \kappa$ *(vertailullisuus).*

Todistus. 1) Tiedetään, että jokaisella A pätee $A \preccurlyeq A$, joten erityisesti $\kappa \preccurlyeq \kappa$ eli $\kappa \leq \kappa$.

2) Jos $\kappa \leq \lambda \leq \mu$ eli $\kappa \preccurlyeq \lambda \preccurlyeq \mu$, niin $\kappa \preccurlyeq \mu$ eli $\kappa \leq \mu$.

3) Jos $\kappa \leq \lambda$ ja $\lambda \leq \kappa$ eli $\kappa \preccurlyeq \lambda$ ja $\lambda \preccurlyeq \kappa$, niin Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lauseen 4 nojalla $|\kappa| = \kappa \approx \lambda = |\lambda|$, joten $\kappa = \lambda$.

4) Lauseen 4.15 nojalla $\kappa \preccurlyeq \lambda$ tai $\lambda \preccurlyeq \kappa$ eli $\kappa \leq \lambda$ tai $\lambda \leq \kappa$.

□

Kardinaalilukujen järjestykselle ja laskutoimituksille on voimassa tutut yhteensopivuussäännöt:

Lause 8.16. *Olkoon κ, λ ja μ kardinaaleja.*

a) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$

b) $\kappa \leq \lambda \;\Rightarrow\; \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$

c) $\kappa \leq \lambda \;\Rightarrow\; \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$

d) $\kappa \leq \lambda \;\Rightarrow\; \mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$*, paitsi jos* $\kappa = \mu = 0$ *ja* $\lambda \neq 0$

Todistus. Olkoot K, L ja M joukot, joilla $\operatorname{card}(K) = \kappa$, $\operatorname{card}(L) = \lambda$ ja $\operatorname{card}(M) = \mu$. Oletetaan lisäksi, että $K \subseteq L$ ja että $L \cap M = \emptyset$. (Tällöin myös $K \cap M = \emptyset$.)

Kohdat a, b ja c seuraavat välittämästi siitä, että

$$K \cup M \subseteq L \cup M, \quad K \times M \subseteq L \times M, \quad \text{ja} \quad {}^{M}K \subseteq {}^{M}L.$$

d) Oletetaan ensin, että $\mu = 0$. Tällöin oletuksen mukaan $\kappa \neq 0$ tai $\lambda = 0$, joten $\mu^{\kappa} = 0 \leq \mu^{\lambda}$ tai $\mu^{\kappa} \leq 1 = \mu^{\lambda}$.

Oletetaan sitten, että $\mu \neq 0$ eli $M \neq \emptyset$. Olkoon $a \in M$. Määritellään kullakin $f\colon K \to M$ funktio $G(f)\colon L \to M$ asettamalla

$$(G(f))(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in K \\ a, & \text{jos } x \in L \setminus K \end{cases}$$

Tällöin on suoraviivaista todeta, että $G\colon {}^{K}M \to {}^{L}M$ on injektio. □

Esimerkki 8.17. Mitä on $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}$? Käyttämällä edellisen lauseen kohtaa (b) kahteen kertaan saadaan seuraava epäyhtälöketju:

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Siis $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Numeroituvat joukot

Määritelmä 8.18. Joukko A on *numeroituva*, jos $A \preccurlyeq \omega$ eli $\operatorname{card}(A) \leq \aleph_0$. Edelleen joukko A on *ylinumeroituva*, jos se ei ole numeroituva.

Siis A on numeroituva, jos A on äärellinen tai $\operatorname{card}(A) = \aleph_0$.

On suoraviivaista osoittaa, että jokainen numeroituvan joukon osajoukko on numeroituva. Edelleen kahden numeroituvan joukon A ja B yhdiste $A \cup B$ ja tulo $A \times B$ ovat numeroituvia.

Lause 8.19. *Numeroituvan monen numeroituvan joukon yhdiste on numeroituva.*

Toisin sanoen: jos $\mathcal{A}$ on numeroituva ja jokainen $A \in \mathcal{A}$ on numeroituva, niin $\bigcup \mathcal{A}$ on numeroituva.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mathcal{A} \neq \emptyset$, sillä $\bigcup \emptyset = \emptyset$ on numeroituva. Edelleen voidaan olettaa, että jokainen $A \in \mathcal{A}$ on epätyhjä, koska kaikilla joukoilla B pätee $\bigcup B = \bigcup \big(B \cup \{\emptyset\}\big)$.

Olkoon $\mathcal{A}$ siis numeroituva epätyhjä joukko numeroituvia epätyhjiä joukkoja. Konstruoidaan surjektio $f\colon \omega \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}$. Tästä seuraa, että $\bigcup \mathcal{A} \preccurlyeq \omega \times \omega \preccurlyeq \omega$.

Koska $\mathcal{A}$ on numeroituva ja epätyhjä, on olemassa surjektio $G\colon \omega \to \mathcal{A}$. Siis $\mathcal{A} = \{G(m) \mid m \in \omega\}$. Edelleen koska $G(m)$ on numeroituva ja epätyhjä, on joukko

$$H(m) = \{g \mid g \text{ on surjektio } \omega \to G(m)\}$$

epätyhjä jokaisella $m \in \omega$. Siis valinta-aksiooman (muotoilu II) perusteella on olemassa funktio $F\colon \omega \to \bigcup_{m\in\omega} H(m)$, jolla $F(m) \in H(m)$ jokaisella $m \in \omega$.

Nyt $F(m)$ on surjektio $\omega \to G(m)$ jokaisella $m \in \omega$, ja voidaan määritellä funktio $f\colon \omega \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}$ asettamalla $f(m,n) = F(m)(n)$. On helppo todeta, että f on surjektio. □

Esimerkki 8.20. Olkoon A joukko. *Jono* joukossa A on funktio $f\colon n \to A$, missä $n \in \omega$. (Jos $n = 0$, niin f on tyhjä jono, eli tyhjä funktio $\varnothing$.) Kaikkien joukon A jonojen joukkoa merkitään

$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}(A) &= \{f \mid f \text{ on jono } A\text{:ssa}\} \\ &= {}^0A \cup {}^1A \cup {}^2A \cup \ldots \end{aligned}$$

(a) Osoitetaan ensin, että $\mathrm{Sq}(\omega) \approx \omega$.

Tämä voidaan todistaa Schröderin ja Bernsteinin lauseen avulla seuraavasti. Määritellään funktio $H\colon \mathrm{Sq}(\omega) \to \omega$ asettamalla

$$H(f) = 2^{f(0)+1} \cdot 3^{f(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{f(n-1)+1},$$

kun $f \in {}^n\omega$ ja p_i on i:s alkuluku. Koska jokaisella kokonaisluvulla on yksikäsitteinen esitys alkulukujen tulona, pätee

$$f \neq f' \;\Rightarrow\; H(f) \neq H(f').$$

Siis H on injektio. Toisaalta funktio $G\colon \omega \to \mathrm{Sq}(\omega)$, jolla $G(n) = f \in {}^1\omega$, missä $f(0) = n$, on selvästi injektio.

(b) Yleisemmin pätee, että jos joukko A on numeroituva, niin myös $\mathrm{Sq}(A)$ on numeroituva. Nimittäin jos $g\colon A \to \omega$ on injektio, ja $f\colon \mathrm{Sq}(\omega) \to \omega$ on bijektio, niin funktioiden g ja f avulla voidaan muodostaa injektio $\mathrm{Sq}(A) \to \omega$ (harjoitustehtävä.)

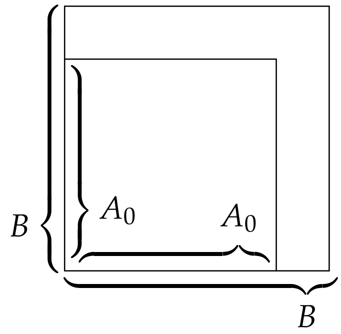
Äärettömien kardinaalilukujen aritmetiikkaa

Edellä huomattiin, että valinta-aksioomaa tarvittiin jo sen todistamiseen, että numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva. Sikäli ei ole mikään yllätys, että valinta-aksioomaa tarvitaan muutenkin äärettömien kardinaalien aritmetiikassa. Zornin lemma on se nimenomainen valinta-aksiooman seuraus, jota tässä yhteydessä sovelletaan.

Apulause 8.21. *Jos κ on ääretön kardinaali, niin $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Todistus. Olkoon B joukko, jolla $\mathrm{card}(B) = \kappa$. Osoitetaan Zornin lemman avulla, että $B \times B \approx B$. Asetetaan

$$\mathcal{H} = \{\varnothing\} \cup \{f \mid f \text{ on bijektio } A \times A \to A \text{ jollain äärettömällä } A \subseteq B\}.$$



Osoitetaan aluksi, että $\mathcal{H}$ on suljettu ketjujen yhdisteiden suhteen. Olkoon siis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$ ketju. Voidaan olettaa, että $\mathcal{B}$ sisältää jonkin epätyhjän funktion, sillä muuten olisi $\bigcup \mathcal{B} = \emptyset \in \mathcal{H}$. Kuten aikaisemmissa todistuksissa on nähty, $\bigcup \mathcal{B}$ on joka tapauksessa injektiivinen funktio. Merkitään

$$A = \operatorname{ran}\left(\bigcup \mathcal{B}\right).$$

On helppo todeta, että $A = \bigcup\{\operatorname{ran}(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$, ja että $A \subseteq B$ on ääretön joukko.

Osoitetaan nyt, että $\operatorname{dom}(\bigcup \mathcal{B}) = A \times A$; tästä jo seuraakin, että $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{H}$. Olkoon $(a, b) \in A \times A$. Tällöin on olemassa funktiot $f, g \in \mathcal{B}$, joilla $a \in \operatorname{ran}(f)$ ja $b \in \operatorname{ran}(g)$. Koska $\mathcal{B}$ on ketju, on joko $f \subseteq g$ tai $g \subseteq f$; symmetrian perusteella voidaan olettaa, että näistä ensimmäinen ehto on voimassa. Nyt voidaan päätellä, että

$$(a, b) \in \operatorname{ran}(g) \times \operatorname{ran}(g) = \operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{dom}\left(\bigcup \mathcal{B}\right).$$

Siis $A \times A \subseteq \operatorname{dom}(\bigcup \mathcal{B})$. Kääntäen, jos $c \in \operatorname{dom}(\bigcup \mathcal{B})$, niin $c \in \operatorname{dom}(f)$ jollain $f \in \mathcal{B}$. Koska $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{ran}(f) \times \operatorname{ran}(f)$ ja $\operatorname{ran}(f) \subseteq A$, nähdään, että $c \in A \times A$.

Nyt voidaan käyttää Zornin lemmaa: on olemassa maksimaalinen funktio $f_0 \in \mathcal{H}$. Olkoon $\operatorname{ran}(f_0) = A_0$, ja olkoon $\operatorname{card}(A_0) = \lambda$. Osoitetaan ensin, että $\lambda \geq \aleph_0$. Koska B on ääretön joukko, sillä on osajoukko A, jolla $\operatorname{card}(A) = \aleph_0$. Tällöin on olemassa bijektio $f \colon A \times A \to A$, ja selvästi $f \in \mathcal{H}$. Nyt nähdään, että $f_0 \neq \emptyset$, sillä muuten olisi $f_0 \subsetneq f$ vastoin oletusta, että f_0 on maksimaalinen. Joukon $\mathcal{H}$ määritelmästä seuraa, että A_0 on ääretön, eli $\lambda \geq \aleph_0$.

Koska $f_0 \colon A_0 \times A_0 \to A_0$ on bijektio, on $\lambda \cdot \lambda = \lambda$. Jos voitaisiin osoittaa, että $A_0 = B$, niin lauseen väite seuraisi välittämästi. Tämä ei kuitenkaan välttämättä pidä paikkaansa! Osoitetaan sen sijaan funktion f_0 maksimaalisuuden avulla, että $\lambda = \kappa$, joka toki riittää.

Osoitetaan tätä varten, että $\operatorname{card}(B \setminus A_0) < \lambda$. Tehdään vastaoletus: $\lambda \leq \operatorname{card}(B \setminus A_0)$. Tällöin joukolla $B \setminus A_0$ on osajoukko D, jolla $\operatorname{card}(D) = \lambda$. Tarkastellaan nyt joukkoa $(A_0 \cup D) \times (A_0 \cup D)$. Se voidaan jakaa erilliseksi yhdisteeksi neljästä osasta:

$$(A_0 \times A_0) \cup (A_0 \times D) \cup (D \times A_0) \cup (D \times D).$$

Kolmen viimeisen osan mahtavuudet ovat kaikki $\lambda \cdot \lambda = \lambda$, joten joukon $(A_0 \times D) \cup (D \times A_0) \cup (D \times D)$ mahtavuus on $\lambda + \lambda + \lambda \leq 3 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. Siispä on olemassa bijektio $g \colon (A_0 \times D) \cup (D \times A_0) \cup (D \times D) \to D$. Nyt $f_0 \cup g$ on bijektio $(A_0 \cup D) \times (A_0 \cup D) \to A_0 \cup D$, joten $f_0 \cup g \in \mathcal{H}$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että f_0 on maksimaalinen. Vastaoletus on siis väärä, joten kardinaalilukujen vertailtavuuden perusteella $\operatorname{card}(B \setminus A_0) < \lambda$.

Nyt todistus voidaan saattaa loppuun seuraavasti:

$$\kappa = \operatorname{card}(A_0) + \operatorname{card}(B \setminus A_0) \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda \leq \kappa,$$

joten $\lambda = \kappa$ ja siis $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. □

Absorptiolaki kardinaaliaritmetiikassa. *Jos κ ja λ ovat kardinaaleja, joilla* $\max(\kappa, \lambda) \geq \aleph_0$ *ja* $\min(\kappa, \lambda) > 0$, *niin* $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Todistus. Oletetaan, että $\lambda \leq \kappa$. Tällöin

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = \kappa \cdot 2 \leq \kappa \cdot \kappa \overset{8.21}{=} \kappa$$

Siis $\kappa + \lambda = \kappa = \max(\kappa, \lambda)$.

Toisaalta

$$\kappa \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

joten $\kappa \cdot \lambda = \kappa = \max(\kappa, \lambda)$. □

Huom. Tarkastellaan mahdollisuuksia määritellä vähennyslasku kardinaaleille. Olkoot κ ja λ kardinaaleja. Tarkoitushan on, että erotus $x = \kappa - \lambda$ olisi yksikäsitteinen yhtälön $\kappa = x + \lambda$ ratkaisu. Luonnollisten lukujen joukossa tällaista ratkaisua ei ole aina olemassa, mutta jos on, niin se on yksikäsitteinen (tämä on tietenkin suora syy sille, miksi luonnollisten lukujen laajennus kokonaislukujen joukoksi on kehitetty). Äärettömien kardinaalien luokassa vähennyslaskun määrittely törmää uusiin ongelmiin: Kun κ on ääretön, niin erotusta $\kappa - \kappa$ ei voida määritellä sen tähden, että yhtälöllä $\kappa = x + \kappa$ on äärettömän monta ratkaisua, nimittäin kaikki kardinaalit $x \leq \kappa$. Sen sijaan voidaan asettaa $\kappa - \lambda = \kappa$, kun $\lambda < \kappa$, sillä $x = \kappa$ on ainoa yhtälön $\kappa = x + \lambda$ ratkaisu.

Samanlaisiin ongelmiin joudutaan tietenkin myös jakolaskun kohdalla.

Esimerkki 8.22. $\kappa^\kappa = 2^\kappa$, kun $\kappa \geq \omega$:

$$\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa \leq \kappa^\kappa.$$

Esimerkki 8.23. a) Kuinka monta funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on olemassa? Toisin sanoen, mitä on $\mathrm{card}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R})$? Vastaus voidaan laskea seuraavasti:

$$\mathrm{card}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = \underset{\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))}{\underset{\shortparallel}{2^{2^{\aleph_0}}}} > 2^{\aleph_0}.$$

b) Kuinka monta jatkuvaa funtiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on olemassa? Kysytään siis, mikä on $\mathrm{card}(C(\mathbb{R}))$, kun

$$C(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva funktio}\}.$$

Tunnetusti jatkuvat funktiot määräytyvät yksikäsitteisesti rationaaliluvuilla saamiensa arvojen perusteella: jos $f, g, \in C(\mathbb{R})$ ja $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$, niin $f = g$. Tämä nähdään seuraavasti: jos $f \neq g$, niin

$$\exists x \in \mathbb{R}\big(f(x) \neq g(x) \text{ eli } f(x) - g(x) \neq 0\big)$$

Tällöin on olemassa avoin väli $\Delta =]x - \delta, x + \delta[$ s.e. $f(y) - g(y) \neq 0$ jokaisella $y \in \Delta$. Koska $\mathbb{Q}$ on $\mathbb{R}$:n tiheä osajoukko, on olemassa $q \in \mathbb{Q} \cap \Delta$. Nyt $f(q) \neq g(q)$, joten $f \restriction \mathbb{Q} \neq g \restriction \mathbb{Q}$.

Kuvaus $H \colon C(\mathbb{R}) \to {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, missä $H(f) = f \restriction \mathbb{Q}$ on siis injektio. Siispä

$$\mathrm{card}(C(\mathbb{R})) \leq \mathrm{card}({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Toisaalta käyttämällä vakiofunktioita, voidaan muodostaa injektio $F \colon \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$, joten $\mathrm{card}(C(\mathbb{R})) \geq \mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$.

Kontinuumihypoteesi

On osoitettu, että $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, mutta onko näiden kahden kardinaalin välissä muita kardinaalilukuja? Tämä on yhtä pitävä seuraavan kysymyksen kanssa:

Kysymys: Onko olemassa joukkoa A, jolla pätee $\omega \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}$ ja $\omega \not\approx A \not\approx \mathbb{R}$?

(Tässä ajatellaan, että luonnolliset luvut ovat reaalilukuja; tämä ei reaalilukujen joukko-opillisen määritelmän mukaan pidä paikkaansa, mutta toki $\mathbb{R}$ sisältää osajoukkonaan ω:n kanssa isomorfisen joukon.)

Kontinuumihypoteesi on oletus, että tällaista joukkoa ei ole olemassa, eli se on väite

Kontinuumihypoteesi (CH) Ei ole olemassa kardinaalilukua κ, jolla

$$\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}.$$

Kurt Gödel osoitti vuonna 1940, että kontinuumihypoteesin negaatiota ($\neg$CH) ei voi todistaa edellä esitetyistä Zermelon–Fraenkelin aksioomeista edes valinta-aksiooman kanssa (ZFC aksioomat). Vuonna 1963 Paul Cohen osoitti pakottamismenetelmällä edelleen, ettei kontinuumihypoteesia itseäänkään voi todistaa ZFC-aksioomeista. Kontinuumihypoteesi on siis riippumaton joukko-opin ZFC aksioomista.

Kontinuumihypoteesi voidaan yleistää kardinaaleista $\aleph_0$ ja $2^{\aleph_0}$ muihin mahtavuuksiin. Millä hyvänsä äärettömällä kardinaalilla κ pätee $\kappa < 2^\kappa$, joten voidaan kysyä, onko niiden välissä muita kardinaalilukuja. Yleistetty kontinuumihypoteesi on olettamus, että vastaus on kielteinen kaikilla äärettömillä kardinaaleilla κ:

Yleistetty kontinuumihypoteesi (GCH) Jos κ on ääretön kardinaali, niin ei ole olemassa kardinaalia λ, jolla

$$\kappa < \lambda < 2^\lambda.$$

Myös yleistetty kontinuumihypoteesi on riippumaton joukko-opin aksioomista: sitä ei voi todistaa, eikä sen negaatiota voi todistaa ZFC:ssä.