9 Ordinaalit

Cantorin joukko-opin hedelmällisimpiä löydöksiä olivat luonnollisten lukujen lukukäsitteen laajennukset, kardinaalit ja ordinaalit. Tässä luvussa käydään vihdoin läpi ordinaalien alkeisteoria. Ilmenee, että tätä varten on tarpeellista käyttää korvausaksioomia, joita on onnistuttu välttämään tähän saakka. Samalla tavalla kuin luonnollisiin lukuihin liittyvät induktio ja rekursio, ordinaalejakaan ei pysty käsittelemään ilman näiden yleistyksiä, transfiniittista induktiota ja rekursiota. Käsitteellisesti ordinaaleja lähestytään kuitenkin eri tavalla kuin luonnollisia lukuja: Siinä, missä luonnolliset luvut tulivat ikään kuin annettuina äärettömyysaksiooman myötä, ordinaaleja käsitellään tietyllä tavoin samoin kuin kardinaaleja. Kardinaalit olivat mahtavuuksien invariantteja, ordinaalit sen sijaan hyvinjärjestyksien invariantteja. Tässä luvussa kardinaaleille esitetään myös vihdoin määritelmä, joka tekee kardinaalien luokasta ordinaalien osaluokan.

Korvausaksioomat

Korvausaksioomien motivoimiseksi esitetään seuraava ajatuskoe: Ordinaalit tullaan määrittelemään niin, että ω on pienin ääretön ordinaali. Luonnollisten lukujen yhteenlaskun määritelmä perustui siihen, että jokaisella $m \in \omega$ voidaan muodostaa rekursiolla kuvaus $h\colon \omega \to \omega$, jolle $h(0) = m$ ja $h(n^+) = h(n)^+$. Tämän kuvauksen avulla saatiin määriteltyä summat $m + n = h(n)$, kun $n \in \omega$. Analogisesti voitaisiin yrittää muodostaa kuvaus h, jolle

$$\begin{cases} h(0) = \omega \\ h(n^+) = h(n)^+ \quad \text{kun } n \in \omega. \end{cases}$$

Ajatuksena olisi siis asettaa $\omega + n = h(n)$. Tämä vaikuttaa (ja osoittautuu olevankin) täysin järkeenkäypää, vaikkakin myöhemmin ordinaalien summa määritellään aivan eri tavalla.

Suunnitelma kohtaa kuitenkin yllättävän takaiskun, kun tarkastellaan tarkemmin, miten rekursiolausetta pitäisi kyseisessä tilanteessa soveltaa: Rekursiosääntö $h(n^+) = h(n)^+$ pitäisi pystyä kirjoittamaan muotoon $h(n^+) = f(h(n))$, missä f on jokin kuvaus. Luonnollisten lukujen summan tapauksessa valittiin yksinkertaisesti kuvaukseksi σ eli luonnollisten lukujen seuraajafunktio. Tässäkin tapauksessa f olisi toki seuraajafunktio, mutta minkä joukon? Rekursiolauseen soveltaminen tuntuisi vaativan, että kuvauksien f ja h arvot osattaisiin rajata etukäteen jonkin tietyn joukon A sisälle. Tämä ei kuitenkaan tunnu olevan mahdollista, ja itse asiassa voitaisiinkin osoittaa, että Zermelon joukko-opissa valinta-aksioomin, ZC, ei voida todistaa tällaisen joukon A olemassaoloa. (Tämä ei ole edes kovin vaikeata mutta edellyttää kuitenkin sellaisten metamatemaattisten menetelmien käyttöönottoa, jotka eivät mahdu tälle kurssille.)

Korvausaksioomat ratkaisevat ongelman, johon on törmätty. Jotta ymmärrettäisin miten, hahmotellaan vielä, miten pitkälle kuvauksen h määrittelyssä päästäisiin ilman sopivaa korvausaksioomaa. Induktiolla voitaisiin todistaa luvun $n \in \omega$ suhteen, että on olemassa kuvaus h_n, jolle $\mathrm{dom}(h_n) = n$ ja

$$\begin{cases} h_n(0) = \omega \\ h_n(k^+) = h_n(k)^+ & \text{kun } k \in n. \end{cases}$$

Zermelon joukko-opissa voidaan siis todistaa, että tavoiteltavan kuvauksen h rajoittumat $h_n = h \upharpoonright n$ ovat olemassaolevia joukkoja, ts. on olemassa joukko-opin kaava, joka liittää jokaiseen luonnolliseen lukuun $n \in \omega$ kuvauksen h_n. Sopiva korvausaksiooma tulee postuloimaan, että tästä seuraa, että on olemassa kuvaus $n \mapsto h(n)$ ja edelleen kuvaus $h = \bigcup_{n \in \omega} h_n$.

Sen sijaan, että jatkossa tyydyttäisiin käymään läpi tämä erityistapaus (kuvauksen h olemassaolo) tai laajentamaan luonnollisten lukujen rekursiolausetta siten, että se kattaa tämän erityistapauksen, todistetaankin vahva transfiniittisen rekursion lause, joka kattaa nämä tapaukset ja paljon muuta.

Abstrahoidaan ongelma, johon törmättiin: Jos H on luokka järjestettyjä pareja, joka toteuttaa funktioehdon (eli jokaisella x on olemassa yksikäsitteinen y, jolla $(x, y) \in H$) ja A on joukko, niin aiemmin esitetyistä aksioomeista ei seuraa, että on olemassa joukko

$$H[A] = \{y \mid \exists x \in A((x, y) \in H)\}.$$

Tämän puutteen korvaamiseksi tarvitaan korvausaksioomat.

Korvausaksioomat. Jokaisella kaavalla $\varphi(x, y)$, joka ei sisällä symbolia B, seuraava lause on aksiooma:

$$\begin{aligned} &\forall A\big(\forall x \in A \forall y \forall z\big(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z\big) \\ &\qquad \to \exists B \forall y\big(y \in B \leftrightarrow \exists x \in A\, \varphi(x, y)\big)\big). \end{aligned}$$

Huom. Kaavassa $\varphi(x, y)$ voi olla muitakin vapaita muuttujia kuin x ja y. Tätä voitaisiin korostaa kirjoittamalla kaava muotoon $\varphi(x, y, t_1, \ldots, t_n)$ ja lisäämällä muuttujia vastaavat universaalikvanttorit aksioomaan:

$$\forall t_1 \ldots \forall t_n \forall A\big(\ldots\big).$$

Tämä ei ole kuitenkaan tarpeen, sillä aksiooman ylläesitetty muoto on riittävän vahva.

Transfiniittinen rekursio

Transfiniittisen reksursion heikko muotoilu lähtee oletuksesta, että (sopiva) maalijoukko B on etukäteen tiedossa. Kuten aiemmin todettiin, tämä ei suinkaan ole aina mahdollista. Uutena esimerkkinä tarkastellaan seuraavaa luonnollista rekursiivista määritelmää:

$$F(t) = \{F(x) \mid x < t\} = \operatorname{ran}(F \restriction \operatorname{seg} t).$$

Ei ole olemassa funktiota G, jolla $G(a) = \operatorname{ran}(a)$ kaikilla joukoilla a. (Tällainen G on aito luokka.) Toisaalta jokaisella joukolla B on toki olemassa funktio G, jolla $\operatorname{dom}(G) = B$ ja $G(a) = \operatorname{ran}(a)$ kaikilla $a \in B$. Mutta ei ole selvää, miten läydetään sopiva joukko B, jossa on varmasti kaikki tarvittavat alkiot ylläolevaa rekursiota varten. Siksi tarvitaan vahvempi muotoilu transfiniiitisesta rekursiosta, jossa funktio G korvataan kaavalla γ, joka toteuttaa funktioehdon:

Transfiniittinen rekursiolause (varsinainen muotoilu). *Jokaisella kaavalla $\gamma(x,y)$ seuraava on joukko-opin teoreema:*

Olkoon $<$ hyvinjärjestys joukossa A. Oletetaan, että jokaisella funktiolla f on olemassa yksikäsitteinen y, jolla kaava $\gamma(f,y)$ on tosi. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen funktio F siten, että $\operatorname{dom}(F) = A$ *ja jokaisella $t \in A$ pätee*

$$\gamma\big(F \restriction \operatorname{seg} t, F(t)\big).$$

Esimerkki 9.1. Transfiniiittisen rekursiolauseen heikko muotoilu seuraa vahvasta muotoilusta valitsemalla kaavaksi $\gamma(x,y)$:

$$\gamma(x,y) := \big(x \in {}^{<A}B \wedge y = G(x)\big) \vee \big(x \notin {}^{<A}B \wedge y = \emptyset\big)$$

Transfiniittisen rekursiolauseen todistus. Todistus on samankaltainen kuin rekursioteoreeman todistus Luvussa 4. Määritellään aluksi hyväksyttävän funktion käsitteelle sopiva vastine: jos $t \in A$, niin funktio v on *γ-konstruoitu alkioon t asti*, jos

(a) $\operatorname{dom}(v) = \{x \mid x \leq t\} = \operatorname{seg} t \cup \{t\}$, ja

(b) $\gamma(v \restriction \operatorname{seg} x, v(x))$ pätee jokaisella $x \in \operatorname{dom}(v)$.

Osoitetaan tämän jälkeen, että kaikki johonkin asti γ-konstruoidut funktiot ovat keskenään yhteensopivia, jolloin voidaan muodostaa kaikkien niiden yhdiste F. Lopuksi osoitetaan, että F toteuttaa kaikki vaadittavat ehdot.

1) Jos $t_1 \leq t_2$, v_1 on γ-konstruoitu alkioon t_1 saakka ja v_2 on γ-konstruoitu alkioon t_2 saakka, niin $v_1(x) = v_2(x)$ jokaisella $x \leq t_1$.

Tehdään vastaoletus: joukko $C = \{x \leq t_1 \mid v_1(x) \neq v_2(x)\}$ on epätyhjä. Olkoon s joukon C pienin alkio. Tällöin $v_1 \restriction \operatorname{seg} s = v_2 \restriction \operatorname{seg} s$, ja siten $\gamma(v_1 \restriction \operatorname{seg} s, v_1(s))$ ja $\gamma(v_1 \restriction \operatorname{seg} s, v_2(s))$. Koska γ määrittää funktion, tästä seuraa, että $v_1(s) = v_2(s)$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $s \in C$.

Määritellään nyt luokka $\mathcal{K}$ asettamalla

$$\mathcal{K} = \{v \mid \exists t \in A\big(v \text{ on } \gamma\text{-konstruoitu alkioon } t \text{ asti}\big)\}.$$

Valitsemalla kohdassa 1 $t_1 = t_2 = t$ nähdään, että jokaisella $t \in A$ on olemassa korkeintaan yksi funktio v, joka on γ-konstruoitu alkioon t asti. Siksi soveltamalla sopivaa korvausaksioomaa voidaan todeta, että $\mathcal{K}$ on joukko.

Olkoon $F = \bigcup \mathcal{K}$. Siis $(x, y) \in F \Leftrightarrow v(x) = y$, jollain $v \in \mathcal{K}$. Todetaan heti aluksi, että F on funktio: jos $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$, niin ne ovat yhteensopivat, kuten edellä on todettu.

2) Kaikilla $x \in \mathrm{dom}(F)$ pätee $\gamma(F \restriction \mathrm{seg}\, x, F(x))$:

Jos $x \in \mathrm{dom}(F)$, niin $x \in \mathrm{dom}(v)$, jollain $v \in \mathcal{K}$. Tällöin $\gamma(v \restriction \mathrm{seg}\, x, v(x))$. Koska v ja F ovat funktioita, ja $v \subseteq F$, on

$$v \restriction \mathrm{seg}\, x = F \restriction \mathrm{seg}\, x \quad \text{ja} \quad v(x) = F(x)$$

Siis $\gamma(F \restriction \mathrm{seg}\, x, F(x))$.

3) $\mathrm{dom}(F) = A$:

Tehdään vastaoletus: $\mathrm{dom}(F) \neq A$. Olkoon t joukon $A \setminus \mathrm{dom}(F)$ on pienin alkio. Tällöin $\mathrm{seg}\, t \subseteq \mathrm{dom}(F)$. (Itse asiassa $\mathrm{seg}\, t = \mathrm{dom}(F)$.) Olkoon y se yksikäsitteinen joukko, jolla pätee $\gamma(F, y)$ ja olkoon $v = F \cup \{(t, y)\}$. Tällöin v on γ-konstruoitu alkioon t asti. Mutta tällöin $v \in \mathcal{K}$ ja siis $t \in \mathrm{dom}(F)$, mikä on ristiriita.

4) F on yksikäsitteinen:

Olkoot F_1 ja F_2 funktioita, jotka toteuttavat vaaditut ehdot. Olkoon $B \subseteq A$ se joukko, jossa F_1 ja F_2 yhtyvät eli

$$B = \{t \in A \mid F_1(t) = F_2(t)\}.$$

Osoitetaan, että B on $<$-induktiivinen.

Olkoon $\mathrm{seg}\, t \subseteq B$. Siis $F_1 \restriction \mathrm{seg}\, t = F_2 \restriction \mathrm{seg}\, t$. Edelleen

$$\gamma(F_1 \restriction \mathrm{seg}\, t, F_1(t)) \quad \text{ja} \quad \gamma(F_2 \restriction \mathrm{seg}\, t, F_2(t)),$$

joten $F_1(t) = F_2(t)$ eli $t \in B$.

Siis $B = A$ eli $F_1 = F_2$. $\square$

Epsilon-kuvat

Olkoon $<$ hyvä järjestys joukossa A. Olkoon $\gamma(x, y)$ kaava $y = \mathrm{ran}(x)$. Transfiniittinen rekursio antaa yksikäsitteisen funktion E, jolle pätee:

$$E(t) = \mathrm{ran}(E \restriction \mathrm{seg}\, t) \quad \text{jokaisella } t \in A.$$

Funktion E arvo joukon A alkiolla t voidaan sieventää seuraavaan muotoon:

$$E(t) = \mathrm{ran}(E \restriction \mathrm{seg}\, t) = E[\mathrm{seg}\, t] = \{E(x) \mid x < t\}.$$

Seuraava käsite on siis hyvinmääritelty:

Määritelmä 9.2. Olkoon $(A, <)$ hyvinjärjestetty joukko. Tällöin transfiniittisellä rekursiolla määriteltyä kuvausta E, jolle $\mathrm{dom}(E) = A$ ja

$$E(t) = \{E(x) \mid x \in A,\ x < t\},$$

kun $t \in A$, kutsutaan $(A, <)$:n *romautuskuvaukseksi* ja joukkoa $\alpha = \mathrm{ran}(E)$ rakenteen $(A, <)$ *Mostowskin romautukseksi* tai *epsilonkuvaksi*. Joukkoa α kutsutaan myös joukon A *ordinaaliksi (eli ordinaaliluvuksi)* ja tätä merkitään $\alpha = \mathrm{ord}(A, <)$. Luonnollisesti γ on *ordinaali*, jos se on jonkun joukon B ordinaali.

Esimerkki 9.3. Olkoon $A = \{a, b, c, \ldots, ä\}$, kun $a < b < c < \ldots < ä$. Nyt

$$\begin{aligned}
E(a) &= \{E(x) \mid x < a\} = \varnothing = 0 \\
E(b) &= \{E(x) \mid x < b\} = \{E(a)\} = \{0\} = 1 \\
E(c) &= \{E(x) \mid x < c\} = \{E(a), E(b)\} = \{0, 1\} = 2 \\
&\vdots \\
E(ä) &= \{E(a), \ldots, E(ä)\} = \{0, \ldots, 27\} = 28
\end{aligned}$$

Lause 9.4. *Olkoon $(A, <)$ hyvinjärjestetty joukko, E sen romautuskuvaus ja α sen Mostowskin romautus. Tällöin pätee:*

a) $E(t) \notin E(t)$ jokaisella $t \in A$.

b) E on bijektio $A \to \alpha$.

c) $\forall t \in A \forall s \in A\big(s < t \leftrightarrow E(s) \in E(t)\big)$.

d) α on transitiivinen joukko.

Todistus.

a) Tehdään vastaoletus: joukko $B = \{t \in a \mid E(t) \in E(t)\}$ on epätyhjä. Olkoon t^* joukon B pienin alkio. Funktion E määritelmän perusteella on olemassa $s < t^*$, jolla $E(t^*) = E(s)$. Mutta tällöin $E(s) \in E(s)$, joten $s \in B$, mikä on mahdotonta, koska oletuksen mukaan $t^* = \min B$.

b) Koska $\alpha = \operatorname{ran}(E)$, on $E\colon A \to \alpha$ surjektio. Osoitetaan sitten, että E on injektio. Olkoot $s, t \in A$ eri alkioita. Tällöin $s < t$ tai $t < s$. Tilanteen symmetrisyyden vuoksi voidaan oletettaa, että $s < t$. Funktion E määritelmän mukaan $E(s) \in E(t)$. Nyt kohdan a perusteella $E(t) \notin E(t)$, joten $E(s) \neq E(t)$.

c) Implikaatio $s < t \to E(s) \in E(t)$ pätee suoraan funktion E määritelmän perusteella. Oletetaan sitten, että $E(s) \in E(t)$. Tällöin on olemassa $x < t$, jolla $E(s) = E(x)$. Koska E on injektio, on oltava $s = x$. Siis $s < t$.

d) Olkoon $v \in \alpha$ ja $u \in v$. Tällöin $v = E(t)$ jollain $t \in A$, ja $u = E(s)$, missä $s \in A$ ja $s < t$, joten $u \in \alpha$.

□

Kun X on joukko, merkitään $\in_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in y\}$, jolloin $\in_X$ on joukon X relaatio. Jatkossa käytetään usein lyhennysmerkintää $(X, \in) = (X, \in_X)$ (järjestetyssä parissahan molempien jäsenten täytyy olla joukkoja, joten yhtälön vasen puoli ei olisi alkuperäismerkityksessä mahdollinen). Edellisen lauseen perusteella funktio E on isomorfismi rakenteiden $(A, <)$ ja $(\alpha, \in_\alpha)$ välillä eli $E\colon (A, <) \cong (\alpha, \in_\alpha) = (\alpha, \in)$.

Seuraus 9.5. *Oletetaan, että $<$ on hyvä järjestys joukossa A ja olkoon α rakenteen $(A, <)$ Mostowskin romautus. Tällöin $\in_\alpha$ on joukon α hyvinjärjestys.*

Ordinaaliluvut

Lause 9.6. *Olkoot* $(A, <_A)$ *ja* $(B, <_B)$ *ovat hyvinjärjestettyjä joukkoja. Tällöin* $(A, <_A) \cong (B, <_B)$*, jos ja vain jos niillä on* $\operatorname{ord}(A, <_A) \cong \operatorname{ord}(B, <_B)$.

Todistus. Oletetaan ensin, että struktuureilla $(A, <_A)$ ja $(B, <_B)$ on sama $\in$-kuva α. Tällöin $(A, <_A) \cong (\alpha, \in) \cong (B, <_B)$, joten $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.

Oletetaan sitten, että $f \colon A \to B$ on isomorfismi. Olkoon E_A rakenteen $(A, <_A)$ ja E_B rakenteen $(B, <_B)$ romautuskuvaus sekä $\alpha = \operatorname{ord}(A, <_A)$ ja $\beta = \operatorname{ord}(B, <_B)$. Siis kaikilla $s \in A$ ja kaikilla $t \in B$ pätee

$$\begin{aligned} E_A(s) &= \{E_A(x) \mid x <_A s\} \text{ ja} \\ E_B(t) &= \{E_B(y) \mid y <_B t\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan transfiniittisella induktiolla, että jokaisella $s \in A$ pätee

$$E_A(s) = E_B(f(s)).$$

Oletetaan siis, että $E_A(x) = E_B(f(x))$ jokaisella $x <_A s$. Tällöin

$$\begin{aligned} E_A(s) &= \{E_A(x) \mid x <_A s\} \\ &= \{E_B(f(x)) \mid x <_A s\} && \text{(induktio-oletus)} \\ &= \{E_B(f(x)) \mid f(x) <_B f(s)\} && \text{(f on isomorfismi)} \\ &= \{E_B(y) \mid y <_B f(s)\} && (f[\operatorname{seg} s] = \operatorname{seg} f(s)) \\ &= E_B(f(s)). \end{aligned}$$

Siis induktioväite pätee. Jo todistetusta seuraa, että

$$\alpha = \{E_A(s) \mid s \in A\} = \{E_B(f(s)) \mid s \in A\} = \{E_B(t) \mid t \in B\} = \beta,$$

sillä f on bijektio $A \to B$. □

Olkoon $(A, <)$ joukon osittaisesti järjestetty joukkko ja $C \subseteq A$. Palautetaan mieleen, että $(A, <)$:n suhteellistuma joukkoon C on

$$(A, <)|C = (C, <^\circ),$$

missä $<^\circ \; = \; < \cap \, (C \times C)$.

Lause 9.7. *Oletetaan, että* $<$ *on osittainen järjestys joukossa* A *ja* $C \subseteq A$*. Tällöin* $(C, <^\circ) = (A, <)|C$ *on osittaisesti järjestetty joukko. Edelleen jos* $<$ *on lineaarijärjestys/hyvinjärjestys, niin* $<^\circ$ *on lineaarijärjestys/hyvinjärjestys.*

Todistus. Joukon C identtinen funktio $\mathrm{id}_C \colon C \to A$ on injektio, joten väite seuraa apulauseesta 5.28. □

Määritelmä 9.8. Alkiorelaatio eli $\in$-relaatio *hyvinjärjestää* joukon A, jos $\in_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x \in y\}$ on joukon A hyvä järjestys.

Lause 9.9. *Olkoon α joukko. Tällöin α on ordinaali, jos ja vain jos α alkiorelaatio hyvinjärjestämä transitiivinen joukko. Itse asiassa jos αonordinaali, niinα on oma $\in$-kuvansa eli $\alpha = \mathrm{ord}(\alpha, \in)$.*

Todistus. Jos α on ordinaali, niin jollakin hyvinjärjestetyllä joukolla $(A, <_A)$ pätee $\alpha = \mathrm{ord}(A, <_A)$. Tällöin lauseen 9.4 nojalla α on transitiivinen ja $(\alpha, \in) \cong (A, <_A)$, joten $(\alpha, \in)$ on hyvinjärjestetyn joukon kanssa isomorfisena rakenteena hyvinjärjestetty joukko.

Oletetaan sitten, että α on transitiivinen alkiorelaation hyvinjärjestämä joukko. Osoitetaan, että $(\alpha, \in)$:n romautuskuvaus E on identtinen kuvaus id_α. Tämä riittää, sillä tästä seuraa

$$\mathrm{ran}(E) = \{\mathrm{id}_\alpha(x) \mid x \in \alpha\} = \{x \mid x \in \alpha\} = \alpha.$$

Todetaan aluksi, että $\mathrm{seg}\, t = t$: Jos $x \in_\alpha t$, niin $x \in t$, joten $\mathrm{seg}\, t \subseteq t$. Toisaalta, jos $x \in t$, niin joukon α transitiivisuuden perusteella $x \in \alpha$, jolloin pätee $x \in_\alpha t$. Siis myös $t \subseteq \mathrm{seg}\, t$.

Oletetaan sitten, että $E(x) = x$ pätee jokaisella $x \in \mathrm{seg}\, t$. Tällöin

$$E(t) = \{E(x) \mid x \in_\alpha t\} = \{x \mid x \in_\alpha t\} = \mathrm{seg}\, t = t.$$

Siis transfiniittisen induktion perusteella saadaan, että $E(x) = x = \mathrm{id}_\alpha(x)$ pätee jokaisella $x \in \alpha$. □

Huom. Edellisen lauseen perusteella ordinaalin käsite voitaisiin määritellä yhtäpitävästi seuraavasti: joukko α on ordinaali, jos se on transitiivinen ja $\in$-relaatio hyvinjärjestää sen.

Seuraava lause kertoo, että ordinaalien luokka on alkiorelaation hyvinjärjestemä.

Lause 9.10. *Olkoot α, β ja γ ordinaaleja. Tällöin pätee:*

a) Ordinaalien luokan transitiivisuus: jokainen α:n alkio on ordinaali.

b) Ordinaalien transitiivisuus: $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \in \gamma$.

c) Ordinaalien irrefleksiivisyys: $\alpha \notin \alpha$.

d) Trikotomia: täsmälleen yksi vaihtoehdoista $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ ja $\beta \in \alpha$ on voimassa.

e) Hyvinjärjestys: Jokaisessa joukossa $S \neq \emptyset$ ordinaaleja on pienin alkio μ: $\mu \in \alpha$ tai $\mu = \alpha$ jokaisella $\alpha \in S$.

Todistus. a) Oletetaan, että $x \in \alpha$. Koska α on jonkin hyvinjärjestetyn struktuurin $(A, <)$ $\in$-kuva, on olemassa $t \in A$, jolla $x = E(t)$. Osoitetaan, että x on tällöin struktuurin $(\mathrm{seg}\, t, <^\circ)$ $\in$-kuva.

Ensinnäkin $(segt, <^\circ)$ on Lauseen 9.7 perusteella hyvinjärjestetty struktuuri. Edelleen on helppo todeta, että struktuurin $(segt, <^\circ)$ $\in$-kuva on $E[\mathrm{seg}\, t] = E(t) = x$. Siis x on ordinaali.

b) Tämä väite seuraa suoraan siitä, että kaikki $\in$-kuvat ovat transitiivisia joukkoja (Lause 6.4 (c)).

c) Vastaoletus: $\alpha \in \alpha$. Olkoon $(A, <)$ hyvinjärjestetty struktuuri, jonka $\in$-kuva α on, ja olkoon E vastaava funktio $A \to \alpha$. Vastaoletuksen perusteella on olemassa $t \in A$, jolla $\alpha = E(t)$. Mutta tällöin pätee $E(t) \in E(t)$, mikä on ristiriidassa Lauseen 6.4 (a) kanssa.

d) Trikotomian "korkeintaan yksi" -ehto seuraa helposti transitiivisuudesta ja irrefleksiivisyydestä. Osoitetaan sitten, että ainakin yksi ehdoista $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ ja $\beta \in \alpha$ pätee.

Tarkastellaan tätä varten hyvinjärjestettyjä struktuureja $(\alpha, \in_\alpha)$ ja $(\beta, \in_\beta)$. Lauseen 6.11 mukaan joko $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$, tai on olemassa $\delta \in \beta$, jolla $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\operatorname{seg} \delta, \in_\beta^\circ)$, tai on olemassa $\delta \in \alpha$, jolla $(\operatorname{seg} \delta, \in_\alpha^\circ) \cong (\beta, \in_\beta)$. Ensimmäisessä tapauksessa $\alpha = \beta$, toisessa tapauksessa $\alpha \in \beta$ ja kolmannessa tapauksessa $\beta \in \alpha$. Jätetään yksityiskohdat harjoitustehtäväksi.

e) Olkoon S epätyhjä joukko ordinaaleja. Valitaan jokin alkio $\beta \in S$. Jos $\beta \cap S = \emptyset$, niin $\beta = \min S$. Tällöin nimittäin jokaisella $\alpha \in S$ pätee $\alpha \notin \beta$, ja siis trikotomian perusteella $\beta \in \alpha$ tai $\beta = \alpha$.

Oletetaan sitten, että $\beta \cap S \neq \emptyset$. Koska $\in_\beta$ on joukon β hyvinjärjestys, tällöin joukossa $\beta \cap S$ on pienin alkio μ. Osoitetaan nyt, että $\mu = \min S$. Oletataan tätä varten, että $\alpha \in S$. Jos $\alpha \notin \beta$, pätee trikotomian perusteella $\beta \in \alpha$ tai $\beta = \alpha$, joten $\mu \in \alpha$. Jos taas $\alpha \in \beta$, niin $\alpha \in \beta \cap S$, joten $\mu \in \alpha$ tai $\mu = \alpha$ alkion μ minimaalisuuden perusteella. □

Edellisen lauseen nojalla on luontevampaa käyttää jatkossa $\in$-symbolin sijasta tavallista järjestyksen symbolia $<$ puhuttaessa ordinaalien järjestyksestä, ellei nimenomaisesti haluta korostaa kuuluvuusrelaatiota. Siis $\alpha < \beta$ tarkoittaa samaa kuin $\alpha \in \beta$, kun α ja β ovat ordinaaleja.

Seuraus 9.11.

a) Jokainen transitiivinen joukko ordinaaleja on ordinaali.

b) 0 on ordinaali.

c) Jos α on ordinaali, niin $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ on oridinaali.

d) Jos A on joukko ordinaaleja, niin $\bigcup A$ on ordinaali.

Todistus.

a) Lauseen 9.10 perusteella jokainen joukko A ordinaaleja on kuuluvuusrelaatiolla hyvinjärjestetty. Jos A on lisäksi transitiivinen, se on ordinaali lauseen 9.9 perusteella.

b) $0 = \emptyset$ on transitiivinen joukko ordinaaleja, joten 0 on ordinaali kohdan a perusteella.

c) Lauseen 6.14 mukaan, jos x on transitiivinen, niin myös x^+ on transitiivinen, joten α^+ on transitiivinen. Koska siis α^+:n alkiot ovat ordinaaleja, α^+ on ordinaali.

d) Jos $x \in \bigcup A$, niin $x \in \alpha$, jollain $\alpha \in A$, joten lauseen 9.10 (a)-kohdan perusteella x on ordinaali. Siis $\bigcup A$ on joukko ordinaaleja.

$\bigcup A$ on transitiivinen:

$$\begin{aligned}
\delta \in A &\Rightarrow \delta \in \alpha \in A && \text{jollain } \alpha \in A \\
&\Rightarrow \delta \subseteq \alpha \in A && \text{koska } \alpha \text{ on transitiivinen} \\
&\Rightarrow \delta \subseteq \bigcup A
\end{aligned}$$

$\bigcup A$ on siis transitiivinen, joten edelleen (a)-kohdan perusteella se on ordinaali.

$\square$

Edellisen lauseen (d)-kohdan voi vahvistaa muotoon: Jos A on joukko ordinaaleja, niin $\bigcup A = \sup A$: nimittäin $\alpha \leq \bigcup A$ jokaisella $\alpha \in A$, ja jos $\alpha \leq \beta$ jokaisella $\alpha \in A$, niin $\bigcup A \leq \beta$.

Huomattakoon myös, että kohtien b ja c nojalla ordinaalien luokka on jotain, jota voitaisiin kutsua induktiiviseksi luokaksi. Siis kaikki luonnolliset luvut ovat ordinaaleja. Tämän olisi tietenkin voinut osoittaa myös lauseen 9.9 avulla ja sen perusteella, mitä von Neumannin luonnollisista luvuista tiedetään. Ordinaalien luokka on kuitenkin aito luokka, ei joukko, mikä osoitetaan Burali-Fortin lauseessa (alla).

Huom. Kaikilla ordinaaleilla α ja β on voimassa

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \;&\Rightarrow\; \alpha \subsetneq \beta && \text{(koska } \beta \text{ on transitiivinen)} \\ &\Rightarrow\; \beta \not\leq \alpha && \text{(muuten olisi } \beta < \beta\text{)} \\ &\Rightarrow\; \alpha < \beta && \text{(trikotomian perusteella)} \end{aligned}$$

Siispä saadaan ekvivalenssi $\alpha \in \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subsetneq \beta$.

Koska $\bigcup A$ on $\sup A$ osajoukkorelaation $\subsetneq$ suhteen, ja $\subsetneq$ on sama kuin järjestys $<$ ordinaalien luokassa, on $\bigcup A = \sup A$ edellä sanotulla tavalla.

Burali-Fortin lause. *Ei ole olemassa joukkoa, johon kaikki ordinaalit kuuluvat.*

Todistus. Jos tällainen joukko olisi olemassa, niin olisi olemassa myös joukko $\mathrm{Ord} = \{\alpha \mid \alpha \text{ on ordinaali}\}$.

Tällöin koska Ord on transitiivinen joukko ordinaaleja, lauseen 9.10 perusteella Ord olisi itsekin ordinaali. Siis $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$. Tämä on ristiriidassa lauseen 9.10 (c)-kohdan kanssa. $\square$

Kardinaalit ordinaaleina

Vihdoin kardinaalilupaukset voidaan lunastaa, ja kardinaalit voidaan määritellä.

Määritelmä 9.12. Olkoon A joukko. Tällöin joukon A *kardinaali eli mahtavuus* $\mathrm{card}(A)$ on pienin sellainen ordinaali α, että $A \approx \alpha$.

Jokaiselle joukolle A on määritelty sen kardinaali sen vuoksi, että hyvinjärjestysperiaatteen nojalla jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää. Kun $<_A$ on joukon A hyvä järjestys, niin $\alpha = \mathrm{ord}(A, <_A)$ on ordinaali, jolle pätee $A \approx \alpha$. Edelleen joukossa

$$S = \{\alpha \mid A \approx \alpha\}$$

on pienin alkio lauseen 9.10 kohdan e nojalla. Edelleen S on joukko, sillä $\mathcal{P}(S) \approx \beta$ myös jollakin ordinaalilla β. Kun $\alpha \in S$, niin $\alpha \in \beta$ tai $\alpha = \beta$ tai $\beta \in \alpha$ ordinaalien vertailtavuuden nojalla (lauseen 9.10 kohta d). Kuitenkin kaksi viimeistä kohtaa ovat ristiriidassa Cantorin lauseen kanssa. Tiedetään nimittäin, että $\alpha \approx A \prec \mathcal{P}(A) \approx \beta$, joten $\beta \subseteq \alpha$ ei voi toteutua (muistettakoon, että $\beta \in \alpha \iff \beta \subsetneq \alpha$). Siis $S \subseteq \beta$ ja S on joukko.

Lunastetaan kardinaalilupaukset:

Lause 9.13. *Olkoot A ja B joukkoja.*

a) $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \iff A \approx B$.

b) $\operatorname{card}(\operatorname{card}(A)) = \operatorname{card}(A)$.

c) Jos A on äärellinen, niin$\operatorname{card}(A)$ *on se yksikäsitteinen luonnollinen luku n, jolle $n \approx A$.*

d) ω on kardinaali.

Todistus. a) Suoraan määritelmän perusteella $\operatorname{card}(A) \approx A$ jokaisella joukolla A. Jos siis $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$, niin $A \approx \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \approx B$, joten $A \approx B$.

Kääntäen, jos $A \approx B$, niin A ja B ovat yhtämahtavia täsmälleen samojen ordinaalien kanssa. Siis myös pienin ordinaali, joka on yhtämahtava joukon A kanssa, on samalla pienin ordinaali, joka on yhtämahtava joukon B kanssa.

b) Koska määritelmän nojalla $\operatorname{card}(A) \approx A$, niin edellisen kohdan mukaan $\operatorname{card}(\operatorname{card}(A)) = \operatorname{card}(A)$.

c) Jos A on äärellinen, niin äärellisyyden määritelmän nojalla $A \approx n$ jollakin $n \in \omega$. Luonnollisia lukuja käsittelevässä luvussa todistettiin, että kaikilla $m \in n$ pätee $m \not\approx n$ (n on Dedekind-äärellinen), joten myös $m \not\approx A$. Siis $n = \operatorname{card}(A)$

d) ω on transitiivinen joukko ja alkiorelaation hyvinjärjestämä, joten se on ordinaali. Huomataan, että $\operatorname{card}(\omega) = \omega$. Nimittäin triviaalisti $\omega \approx \omega$, ja kun $n < \omega$ eli $n \in \omega$, niin n on luonnollisena lukuna äärellinen, kun sen sijaan ω on ääretön, joten $n \not\approx \omega$. □

Kun ordinaalia ω käsitellään kardinaalina, sitä on kuitenkin tavanomaista edelleenkin merkitä $\aleph_0$:lla. Siis kaikki luonnolliset luvut ja ω ovat kardinaaleja. Pienin ordinaali, joka ei ole kardinaaleja, on itse asiassa toiseksi pienin ääretön ordinaali (ω on pienin) $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$. Sille nimittäin pätee $\omega^+ \approx \omega$, joten $|\omega^+| = \omega$.

Kardinaalien jono:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \underset{\aleph_0}{\overset{\omega}{\shortparallel}} < \underset{\aleph_1}{\overset{2^{\aleph_0}}{\shortparallel_{(CH)}}} < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \ldots < \aleph_\alpha < \ldots$$

Ordinaaliaritmetiikka

Ordinaalien peruslaskutoimitukset voidaan määritellä analogisesti kardinaalien laskutoimituksiin nähden.

Määritelmä 9.14. Olkoot α ja β ordinaaleja. Tällöin ordinaalien α ja β *summa* on

$$\alpha + \beta = \operatorname{ord}((\alpha, \in) \oplus (\beta, \in))$$

ja *tulo* on

$$\alpha \cdot \beta = \operatorname{ord}((\beta, \in) \otimes (\alpha, \in)).$$

Huom. Tulon määritelmässä rakenteet $(\alpha, \in)$ ja $(\beta, \in)$ vaihtavat merkillisellä tavalla paikkoja. Tulossa ordinaalien järjestys valitettavasti on vakiintunut tällaiseksi.

Apulause 9.15. *Olkoon $(A, <)$ hyvinjärjestetty joukko ja $B, C \subseteq A$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $t \in A$, että $B = \mathrm{seg}_<(t)$ ja $C = A \smallsetminus B$. Merkitään $(B, <_B) = (A, <)|B$ ja $(C, <_C) = (A, <)|C$. Tällöin*

$$(A, <) \cong (B, <_B) \oplus (C, <_C).$$

Todistus. (hahmotelma) Kuvaus $f\colon A \to (B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$,

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0), & \text{kun } x < t \\ (x, 1), & \text{kun } x \geq t \end{cases}$$

on kaivattu isomorfismi. $\square$

Lause 9.16. *Olkoot $(A, <_A)$ ja $(B, <_B)$ hyvinjärjestettyjä joukkoja. Tällöin*

$$\mathrm{ord}\big((A, <_A) \oplus (B, <_B)\big) = \mathrm{ord}(A, <_A) + \mathrm{ord}(B, <_B)$$

ja

$$\mathrm{ord}\big((A, <_A) \otimes (B, <_B)\big) = \mathrm{ord}(B, <_B) \cdot \mathrm{ord}(A, <_A).$$

Todistus. (hahmotelma) Seuraa lauseesta 5.32 ja ordinaalien peruslaskutoimitusten määritelmästä. $\square$

Lause 9.17. *Kaikilla ordinaaleilla α, β ja γ pätevät seuraavat laskulait:*

$$\begin{gathered} \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \\ \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha \\ \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0 \\ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \\ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) \end{gathered}$$

Todistus. (luonnos) Laskulait palautuvat sopivien rakenteiden välisiin isomorfismeihin. $\square$

Kumulatiivisen hierarkian tasot

Kumulatiivisen hierarkian idea: $V_0 = \emptyset$, ja yleisemmin V_α sisältää ne joukot, joiden alkiot ovat joukossa V_β jollain $\beta \in \alpha$.

Muotoillaan tämä idea vielä uudelleen seuraavasti:

$$\begin{aligned} a \in V_\alpha &\Leftrightarrow a \subseteq V_\beta \text{ jollain } \beta \in \alpha \\ &\Leftrightarrow a \in \mathcal{P}(V_\beta) \text{ jollain } \beta \in \alpha \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta). \end{aligned}$$

Siis intuitiivisesti kumulatiivisen hierarkian taso V_α on joukko

$$V_\alpha = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \in \alpha\}.$$

Tämä määritelmä voidaan tehdä täsmälliseksi transfiniittisella rekursiolla. On kuitenkin huomattava, että transifiniittinen rekursio pitää aina tehdä jonkin joukon hyvinjärjestyksen suhteen; sitä ei voi tehdä ordinaalien luokan suhteen. Siksi tasot V_α määritellään ensin johonkin ylärajaan δ asti.

Apulause 9.18. *Jokaisella ordinaalilla δ on olemassa yksikäsitteinen funktio F_δ s.e.* $\mathrm{dom}(F_\delta) = \delta$ *ja jokaisella $\alpha \in \delta$ pätee:*

$$F_\delta(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}(F_\delta(\beta)) \mid \beta \in \alpha\}$$

Todistus. Käytetään transfiniittista rekursiota. Olkoon $\gamma(x, y)$ kaava

$$y = \bigcup\{\mathcal{P}(z) \mid z \in \mathrm{ran}(x)\}.$$

Selvästi jokaisella f on olemassa yksikäsitteinen joukko y, jolla $\gamma(f, y)$ on tosi. Transfiniittinen rekursio antaa yksikäsitteisen funktion F_δ, jolla pätee

$$F_\delta(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}(z) \mid z \in \mathrm{ran}(F_\delta \restriction \mathrm{seg}\,\alpha)\}$$

jokaisella $\alpha \in \delta$. Koska $\mathrm{seg}\,\alpha = \alpha$ jokaisella ordinaalilla α, nähdään, että

$$z \in \mathrm{ran}(F_\delta \restriction \mathrm{seg}\,\alpha) \;\Leftrightarrow\; z = F_\delta(\beta) \;\text{ jollain } \beta \in \alpha.$$

Siispä $F_\delta(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}(F_\delta(\beta)) \mid \beta \in \alpha\}$, niin kuin pitääkin. □

Apulause 9.19. *Olkoot δ ja ε ordinaaleja ja olkoot F_δ ja F_ε funktioita kuten apulauseessa 9.18. Tällöin $F_\delta(\alpha) = F_\varepsilon(\alpha)$, jokaisella $\alpha \in \delta \cap \varepsilon$.*

Todistus. Oletetaan, että $\delta < \varepsilon$; tapaus $\varepsilon < \delta$ menee samoin, ja tapaus $\delta = \varepsilon$ on triviaali. Osoitetaan transfiniittisella induktiolla, että $F_\delta(\alpha) = F_\varepsilon(\alpha)$ jokaisella $\alpha \in \delta$.

Olkoon $B = \{\alpha \in \delta \mid F_\delta(\alpha) = F_\varepsilon(\alpha)\}$. Oletetaan, että $\mathrm{seg}\,\alpha \subseteq B$. Pitää osoittaa, että tällöin $\alpha \in B$. Oletuksesta seuraa, että $F_\delta(\beta) = F_\varepsilon(\beta)$ jokaisella $\beta < \alpha$. Siispä

$$F_\delta(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}(F_\delta(\beta)) \mid \beta < \alpha\} = \bigcup\{\mathcal{P}(F_\varepsilon(\beta)) \mid \beta < \alpha\} = F_\varepsilon(\alpha),$$

joten $\alpha \in B$. □

Määritelmä 9.20. Olkoon α ordinaali. Tällöin kumulatiivisen hierarkian vastaava taso on joukko

$$V_\alpha = F_\delta(\alpha),$$

missä δ on mikä hyvänsä ordinaali, jolla $\alpha \in \delta$ (esimerkiksi $\delta = \alpha^+$ kelpaa).

Lause 9.21. *Jokaisella ordinaalilla α*

$$V_\alpha = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \in \alpha\}.$$

Todistus. Olkoon $\delta = \alpha^+$. Tällöin määritelmän mukaan $V_\alpha = F_\delta(\alpha)$, ja myös $V_\beta = F_\delta(\beta)$ jokaisella $\beta < \alpha$. Siispä

$$V_\alpha = \bigcup\{\mathcal{P}(F_\delta(\beta)) \mid \beta < \alpha\} = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\}.$$

□

Apulause 9.22. *V_α on transitiivinen joukko jokaisella ordinaalilla α.*

Todistus. Todistetaan jokaisella ordinaalilla δ, että jos $\alpha < \delta$, niin $V_\alpha = F_\delta(\alpha)$ on transitiivinen. Tämä tehdään transfiniittisella induktiolla hyvinjärjestyksen $(\delta, \in_\delta)$ suhteen.

Olkoon
$$B = \{\alpha < \delta \mid V_\alpha \text{ on transitiivinen}\}.$$
Osoitetaan, että B on $\in_\delta$-induktiivinen, jolloin transfiniittisen induktioperiaatteen nojalla $B = \delta$.

Oletetaan siis, että $\operatorname{seg}\alpha \subseteq B$. (Huomaa, että $\operatorname{seg}\alpha = \alpha$.) Tällöin jokaisella $\beta < \alpha$ V_β on transitiivinen. Samoin jokainen $\mathcal{P}(V_\beta)$ on transitiivinen, sillä jokaisen transitiivisen joukon potenssijoukko on transitiivinen (harjoitustehtävä).

Nyt voidaan päätellä seuravasti:

$$\begin{aligned} x \in V_\alpha \;&\Rightarrow\; x \in \mathcal{P}(V_\beta) \text{ jollain } \beta < \alpha \\ &\Rightarrow\; x \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) \text{ jollain } \beta < \alpha \\ &\Rightarrow\; x \subseteq \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta < \alpha\} = V_\alpha. \end{aligned}$$

Siis V_α on transitiivinen, joten $\alpha \in B$. □

Ordinaali δ on *rajaordinaali*, jos se ei ole 0 eikä minkään muun ordinaalin α seuraaja α^+. Ordinaaleja on siis kolmea tyyppiä:

- 0,
- *seuraajaordinaalit* α^+,
- *rajaordinaalit*, esimerkiksi ω.

Huomaa, että jos δ on *rajaordinaali* ja $\beta < \delta$, niin $\beta^+ < \delta$.

Lause 9.23.

(a) *Kaikilla ordinaaleilla β ja α pätee: $\beta < \alpha \;\Rightarrow\; V_\beta \subseteq V_\alpha$.*

(b) $V_0 = \emptyset$

(c) $V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

(d) $V_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} V_\beta$, *kun δ on rajaordinaali.*

Todistus.

(a) Oletetaan, että $\beta < \alpha$. Tällöin $V_\beta \in \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq V_\alpha$ $(= \bigcup_{\gamma\in\alpha} \mathcal{P}(V_\gamma))$. Siis $V_\beta \in V_\alpha$, joten $V_\beta \subseteq V_\alpha$, koska V_α on transitiivinen.

(b) Seuraa suoraan määritelmästä.

(c) (a)-kohdan perusteella:

$$\beta < \alpha \;\Rightarrow\; V_\beta \subseteq V_\alpha \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha).$$

Täten

$$V_{\alpha^+} = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) \mid \beta \leq \alpha\} = \mathcal{P}(V_\alpha).$$

(d) Osoitetaan ensin, että $V_\delta \subseteq \bigcup_{\beta<\delta} V_\beta$:

$$\begin{aligned} x \in V_\delta &\Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\beta) && \text{jollain } \beta < \delta \\ &\overset{(c)}{\Rightarrow} x \in V_{\beta^+} && \text{jollain } \beta < \delta \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{\beta<\delta} V_\beta && \text{koska } \beta^+ < \delta. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $\bigcup_{\beta<\delta} V_\beta \subseteq V_\delta$:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{\beta<\delta} V_\beta &\Rightarrow x \in V_\beta \subseteq V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta) && \text{jollain } \beta < \delta \\ &\Rightarrow x \in V_\delta. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 9.24. Joukko A on *hyvinperustettu*, jos $A \subseteq V_\alpha$ jollain ordinaalilla α. Tällöin joukon A *aste*, $\mathrm{rank}(A)$, on pienin ordinaali α, jolla tämä pätee.

Jokaisella hyvinperustetulla joukolla A pätee siis $A \subseteq V_{\mathrm{rank}(A)}$, ja edelleen $A \in V_{\mathrm{rank}(A)^+}$. Ordinaali $\mathrm{rank}(A)$ kertoo, kuinka monta kertaa potenssijoukko-operaatiota pitää soveltaa lähtien tyhjästä joukosta, jotta kaikki joukon A alkiot saadaan muodostetuksi.

Jokainen ordinaali α on hyvinperustettu, ja $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$ (harjoitustehtävä).

Lause 9.25. *(a) Jos joukko A on hyvinperustettu, ja $a \in A$, niin myös a on hyvinperustettu ja* $\mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(A)$.

(b) Jos jokainen joukon A alkio on hyvinperustettu, niin myös A on hyvinperustettu, ja $\mathrm{rank}(A) = \bigcup\{(\mathrm{rank}(a))^+ \mid a \in A\}$.

Todistus. (a) Oletetaan, että joukko A on hyvinperustettu, ja $a \in A$. Olkoon $\alpha = \mathrm{rank}(A)$. Tällöin $A \subseteq V_\alpha$, joten $a \in V_\alpha$. Siis on olemassa $\beta < \alpha$, jolla $a \in \mathcal{P}(V_\beta)$, eli $a \subseteq V_\beta$. Tästä jo seuraakin, että a on hyvinperustettu, ja $\mathrm{rank}(a) \leq \beta < \alpha = \mathrm{rank}(A)$.

(b) Oletetaan, että kaikki joukon A alkiot ovat hyvinperustettuja. Määritellään ordinaali α asettamalla

$$\alpha = \bigcup\{(\mathrm{rank}(a))^+ \mid a \in A\}.$$

Osoitetaan ensin, että $A \subseteq V_\alpha$; tästä seuraa, että A on hyvinperustettu, ja $\mathrm{rank}(A) \leq \alpha$. Oletetaan siis, että $a \in A$; pitää osoittaa, että tällöin $a \in V_\alpha$. Tämä nähdään seuraavasti:

$$a \subseteq V_{\mathrm{rank}(a)} \;\Rightarrow\; a \in V_{(\mathrm{rank}(A))^+} \;\Rightarrow\; a \in V_\alpha.$$

Vielä pitää osoittaa, että $\alpha \leq \mathrm{rank}(A)$. Kohdan (a) perusteella kaikilla $a \in A$ pätee $\mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(A)$, ja näin ollen $(\mathrm{rank}(a))^+ \leq \mathrm{rank}(A)$. Siispä

$$\mathrm{rank}(A) \geq \sup\{(\mathrm{rank}(a))^+ \mid a \in A\} = \alpha.$$

□

Lause 9.26. *(ZFC-) Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

a) Jokainen joukko on hyvinperustettu.

b) Jokaisella epätyhjällä joukolla A on alkio m, jolla $m \cap A = \emptyset$.

Todistus. (luonnos) Olkoon A hyvinperustettu joukko. Tällöin asteen minimoiva $m \in A$ on joukko, jolle $m \cap A = \emptyset$.

Oletetaan sitten, että säännöllisyysaksiooma on voimassa. Olkoon A joukko. Muodostetaan ensin joukon A transitiivinen sulkeuma: Määritellään rekursiolla $A_0 = A$ ja $A_{n+1} = \bigcup A_n$, kun $n \in \omega$. *Transitiivinen sulkeuma* on tällöin $\mathrm{TC}(A) = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Osoittautuu, että A on hyvinperustettu, koska sen ylijoukko $\mathrm{TC}(A)$ on hyvinperustettu. Muuten joukossa

$$B = \{x \in \mathrm{TC}(A) \mid x \text{ ei ole hyvinperustettu}\}$$

olisi alkio m, jolle $m \cap B = \emptyset$, mistä seuraisi ristiriita edellisen lauseen kanssa. □

Koska joukko-opin tavallisena lähtäkohtana on ajatus, että kaikki joukot ovat kumulatiivisessa hierarkiassa, ja siten hyvinperustettuja otetaan edellisen lauseen jälkimmäinen ehto yhdeksi joukko-opin aksioomaksi:

Säännöllisyysaksiooma

$$\forall A(A \neq \emptyset \to \exists m \in A(m \cap A = \emptyset))$$

Säännöllisyysaksioomasta seuraa, että mikään joukko ei ole itsensä alkio, eikä ole olemassa ääretöntä jonoa joukkoja, jotka muodostavat laskevan $\in$-ketjun:

Lause 9.27. *(a) Ei ole olemassa joukkoa a, jolla $a \in a$.*

(b) Ei ole olemassa joukkoja a ja b, joilla $a \in b$ ja $b \in a$.

(c) Ei ole olemassa funktiota f, jolla $\mathrm{dom}(f) = \omega$ ja $f(n^+) \in f(n)$ jokaisella $n \in \omega$.

Todistus. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Kirjallisuutta

[End77] Herbert B. Enderton. *Elements of set theory*. Academic Press, 1977.

[Pea89] Giuseppe Peano. *Arithmetices Principia. Nova methodo exposita.* Libreria Bocca, 1889.

[von23] J. von Neumann. Zur Einführung der transfiniten Zahlen. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1:199–208, 1923.

[Zer08] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, 65(2):261–281, 1908.